

UN ESEMPIO DI PERCORSO DI MATEMATICA PER IL SECONDO BIENNIO DI UNA SCUOLA SECONDARIA DI II GRADO CON UNA DISPONIBILITÀ ORARIA SETTIMANALE DI 2 ORE

Nel rispetto degli obiettivi specifici di apprendimento previsti dalle *INDICAZIONI NAZIONALI* e dalle *LINEE GUIDA*

Premessa

Quanto proposto dal nostro gruppo di lavoro rappresenta solo un esempio, tra i *molti* possibili, di un percorso didattico di matematica attuabile nel Secondo Biennio di una Scuola Secondaria di II grado con il monte orario sopra indicato e in continuità con il percorso già proposto per il Primo Biennio.

Vogliamo sottolineare ancora una volta che anche questa proposta, che non vuole in alcun modo essere prescrittiva, si pone come obiettivo principale quello di indicare ai docenti un modo per soddisfare quanto richiesto nelle *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento* anche con un monte ore così limitato, e nelle *Linee guida per i ònuovi tecnici e professionali* senza per questo penalizzare alcuno degli ambiti di contenuto, cioè: *Aritmetica e algebra, Geometria, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*.

Anche per questo motivo il gruppo ha cercato di evidenziare il più possibile i collegamenti tra i vari ambiti nella convinzione che presentare allo studente uno stesso concetto sotto diversi possibili punti di vista consenta di cogliere l'aspetto di sostanziale unità della matematica e nel contempo di approfondire i procedimenti caratteristici del pensiero matematico.

In ogni caso è opportuno sottolineare che, dato il gran numero di argomenti da affrontare secondo quanto espresso dalle *Indicazioni Nazionali* e dalle *Linee Guida*, non tutti potranno avere una trattazione approfondita; per alcuni ci si dovrà limitare a una trattazione intuitiva, cercando di utilizzare quanto appreso dallo studente nel Primo Biennio e nel Ciclo scolastico precedente, cioè nella Scuola Secondaria di I Grado. Oltre che ad attenersi ai contenuti presenti nelle indicazioni ministeriali, il gruppo ha ritenuto opportuno dare anche delle indicazioni metodologiche sia per ottimizzare i tempi sia per una comune impostazione culturale acquisita all'interno dell'UMI-CIIM in questo ultimo decennio.

Come ulteriore aiuto per il docente per ogni blocco di argomenti, di cui verrà indicato *grosso modo* il numero di ore che l'insegnante dovrà dedicargli, saranno suggerite una o più attività facilmente reperibili in rete nei siti indicati. È chiaro che anche l'indicazione del numero di ore non è prescrittiva: sarà l'insegnante, dopo aver valutato la situazione della classe in cui attuare il percorso, a decidere il numero di ore da dedicare a un dato argomento, senza per questo stravolgere il monte ore previsto.

Un ulteriore problema, assai delicato e di non facile soluzione, è quello della valutazione degli studenti. È chiaro che un percorso come quello che andiamo a delineare presuppone un uso mirato e appropriato di una didattica *laboratoriale* in cui la funzione del docente è soprattutto quella di proporre, stimolare discussioni, coordinare, í con momenti conclusivi di sistemazione e messa a punto di quanto appreso. È all'interno di questa pratica che l'insegnante dovrà trovare l'occasione per una prima valutazione delle conoscenze e competenze apprese, ferme restando le usuali prove di verifica. Naturalmente la realizzazione di una didattica *laboratoriale* è molto ardua disponendo di due sole ore settimanali. Per avere speranze di poter realizzare una tale didattica è quindi necessario trovare sinergie con altre discipline e con altri docenti del consiglio di classe.

Riteniamo, però, che l'unica soluzione davvero efficace consista nella scelta di una revisione del piano orario. Infatti un tempo così limitato pone ostacoli significativi addirittura alla possibilità di acquisire conoscenze adeguate da parte degli studenti.

Per consentire un tempo adeguato alla valutazione il percorso è articolato su 100 ore in due anni, inferiore al monte ore formalmente previsto di 132 (66 ore per ogni anno scolastico).

L'organizzazione del lavoro è la seguente:

- **Schema della proposta di suddivisione oraria per il percorso di Matematica II biennio (Indirizzi di studio con 2 ore settimanali)**
- **Descrizione Ambiti**
- **Programmazione didattica con scansione oraria**

Quello che segue, come già sottolineato, è uno dei possibili percorsi. In una successiva versione più estesa di questo documento sarà possibile trovare altre indicazioni e molti materiali per approfondire ulteriormente l'approccio metodologico proposto o per ampliare il percorso al fine di adattarlo ad altri indirizzi con una disponibilità oraria maggiore; si vedano in particolare la Bibliografia e i siti indicati.

Le attività indicate nel presente documento sotto la voce "Attività di m@t.abel per il secondo biennio" non sono, al momento, tutte reperibili in rete. Saranno rese pubbliche sul sito Indire a breve.

Schema della proposta di suddivisione oraria per il percorso di Matematica II biennio (Indirizzi di studio con 2 ore settimanali)

<p>Aritmetica e algebra 3 h (A1) Numeri reali: Richiamo sulle proprietà di R. Numeri algebrici e trascendenti.</p> <p>4 h (A2) Successioni. 3 h (A3) Principio di induzione e sue applicazioni.</p> <p>5 h (A4) I polinomi a coefficienti reali: Scomposizione in fattori, divisione tra polinomi. 4 h (A5) Risoluzione di equazioni di secondo grado.</p> <p>3 h (A6) Il problema del contare. Elementi di base del calcolo combinatorio.</p> <p>Relazioni e funzioni 3 h (R1). Richiami sulle funzioni $f(x) = x$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$. 2 h Funzione inversa di $y = ax^2$ con $x \geq 0$, dominio, segno. Funzioni di vario tipo: potenza, cubiche, polinomiali. Concetto intuitivo di asintoto.</p> <p>2 h (R2). Trasformazione di $y = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$ in $y = k \cdot \sin(px + q)$</p> <p>4 h (R3). Dalla successione geometrica alla funzione esponenziale. Semplici equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.</p> <p>4 h (R4). Concetto intuitivo di continuità. La funzione parte intera di x. Funzioni definite a tratti.</p>	<p>Raggruppamenti comuni</p> <p>4 h (C1)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Equazione della circonferenza, della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole riferite a opportuni assi cartesiani (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>); possibilità di rappresentare tali curve in forma parametrica. <p>4 h (C2)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Il moto armonico e le funzioni circolari (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>). <p>2 h Introduzione del concetto di variabile casuale (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i>, <i>Relazioni e funzioni</i>, e <i>Dati e previsioni</i>).</p> <p>(C3) Equazioni di grado superiore al secondo e loro risoluzione numerica. Teorema di Ruffini (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>).</p>	<p>Geometria 8 h (G1 ó Coniche):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Osservazione e riproduzione di curve riconducibili a sezioni di un cono e loro rappresentazione grafica (sia sintetica che nel piano cartesiano [vedi raggruppamenti comuni, in cui 2 ore delle 4 indicate sono comprese in queste 10]). - Costruzione di coniche come luoghi geometrici. <p>8 h (G2 ó Trigonometria):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Misura di angoli in gradi sessagesimali e in radianti. - Seno, coseno, tangente di un angolo acuto come applicazione della similitudine tra triangoli. - Risoluzione di triangoli rettangoli. - Seno, coseno, tangente di un angolo con riferimento alla circonferenza goniometrica. - Le relazioni fondamentali che legano seno, coseno, tangente. - Angoli associati. - Teoremi dei seni e del coseno. - Formule di addizione per seni e coseni. - Risoluzione di triangoli qualsiasi. - Area del triangolo. <p>10 h (G3 ó Geometria dello Spazio): Riconoscimento nel mondo reale di figure geometriche note (prismi, piramidi, alcuni tipi di poliedri,</p>
---	---	---

<p>2 h (R5). Concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.</p>	<p>(C4) Funzioni quadratiche: rappresentazione simbolica, grafica, numerica. (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>)</p> <p>(C5) Uso consapevole delle tecnologie, software di geometria dinamica e software di algebra (CAS) (in comune tra <i>Aritmetica e algebra, Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>5 h (C6) Sistemi di secondo grado. Risoluzione algebrica e grafica (in comune tra <i>Aritmetica e algebra e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C7) Funzioni razionali del tipo $f(x) = x + k/x$ $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ $f(x) = (ax^2 + bx + c)/(dx + e)$. Asintoto obliquo, divisione fra polinomi (in comune tra <i>Aritmetica e algebra e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C8) Funzioni periodiche elementari $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$. Passaggio da gradi a radianti (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>2 h (C9) Semplici equazioni e disequazioni trigonometriche (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C10) Funzione esponenziale e logaritmica (in comune tra <i>Relazioni e funzioni e Dati e previsioni</i>)</p>	<p>cilindri, coni, sfere) e loro descrizione con un linguaggio appropriato e una terminologia progressivamente sempre più specifica.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Proprietà essenziali relative a rette e piani nello spazio e loro riconoscimento in situazioni concrete. - Analisi con strumenti intuitivi di forme, sezioni e sviluppi piani di semplici poliedri e solidi di rotazione. - Esempi di semplici dimostrazioni di proprietà di prismi e piramidi. - Parallelismo e perpendicolarità nello spazio. - Diedri e angoloidi; proprietà (somma delle α facce di un angoloide). <p>Dati e previsioni</p> <p>7 h (D1)</p> <ul style="list-style-type: none"> · Analizzare distribuzioni doppie di frequenze; · richiami sui concetti base della probabilità (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti). <p>3 h (D2)</p> <ul style="list-style-type: none"> · Indicatori statistici mediante rapporti e differenze (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti). <p>4 h (D3)</p> <ul style="list-style-type: none"> · Probabilità totale, probabilità condizionata e composta, teorema di Bayes (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).
--	---	--

	(C11) · Correlazione tra due caratteri quantitativi in una distribuzione doppia: punto di vista grafico; · misura della correlazione lineare e regressione lineare (in comune tra <i>Relazioni e funzioni</i> , <i>Geometria e Dati e previsioni</i>).	4 h (D4) Campionamento casuale semplice e tecniche di campionamento (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).
--	---	---

Osservazione 1: alcuni temi che compaiono nei raggruppamenti comuni della precedente tabella non comportano un aggravio di ore perché sono già previsti nella prima e terza colonna. Invece altri temi comportano un'aggiunta alle ore previste, perché introducono anche concetti non espliciti nella prima e terza colonna.

Osservazione 2: il concetto di *velocità di variazione*, per la sua importanza culturale e per il prosieguo degli studi, va introdotto gradualmente e in modo pervasivo, già a partire dal terzo anno, quando si trattano argomenti di pre-analisi.

Proponiamo qui una possibile programmazione didattica, suddivisa per anno, finalizzata al conseguimento degli obiettivi essenziali, in termini di conoscenze e abilità, per tutti gli indirizzi di studio.

III anno

6 h Funzioni quadratiche: rappresentazione simbolica, grafica, numerica.

5 h Scomposizione in fattori, divisione tra polinomi.

4 h Risoluzione di equazioni di secondo grado.

3 h Richiamo sulle proprietà di \mathbf{R} . Numeri algebrici e trascendenti.

2 h Funzione inversa di $y = ax^2$ con $x \geq 0$, dominio, segno.

3 h Richiami di Funzione reciproca e Funzione valore assoluto. Funzioni di vario tipo: potenza, cubiche, polinomiali. Concetto intuitivo di asintoto.

4 h Equazione della circonferenza, della parabola, riferite a opportuni assi cartesiani.

4 h Sistemi di secondo grado. Risoluzione algebrica e grafica.

3 h Indicatori statistici mediante rapporti e differenze.

8 h Trigonometria

- Misura di angoli in gradi sessagesimali e in radianti.
- Seno, coseno, tangente di un angolo acuto come applicazione della similitudine tra triangoli.
- Risoluzione di triangoli rettangoli.
- Seno, coseno, tangente di un angolo con riferimento alla circonferenza goniometrica.
- Le relazioni fondamentali che legano seno, coseno, tangente.
- Angoli associati.
- Teoremi dei seni e del coseno.
- Formule di addizione per seni e coseni.
- Risoluzione di triangoli qualsiasi.
- Area del triangolo.

4 h Trasformazioni delle funzioni periodiche.

Trasformazione di $y = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$ in $y = k \cdot \sin(px + q)$

- Semplici equazioni e disequazioni trigonometriche.

4 h Il moto armonico e le funzioni circolari.

Bisogna precisare che la parte relativa alle equazioni e disequazioni trigonometriche serve solo per dare un'idea di che cosa sono le equazioni e disequazioni trigonometriche (periodicità delle soluzioni, visualizzazione grafica), non certo per far acquisire una tecnica legata alle risoluzioni dei diversi tipi di equazioni e disequazioni. Ci si dovrà limitare al caso di equazioni e disequazioni lineari in seno e coseno.

Si **suggerisce di usare in modo consapevole** le tecnologie, software di geometria dinamica, software di algebra (CAS) e fogli elettronici **tutte le volte che è possibile, utile e significativo.**

IV anno

3 h Il problema del contare. Elementi di base del calcolo combinatorio.

2 h Introduzione del concetto di variabile casuale.

7 h Analizzare distribuzioni doppie di frequenze; richiami sui concetti base della probabilità.

4 h Probabilità totale, probabilità condizionata e composta, teorema di Bayes.

4 h Correlazione tra due caratteri quantitativi in una distribuzione doppia: punto di vista grafico; misura della correlazione lineare e regressione lineare.

10 h Geometria dello spazio:

- Riconoscimento nel mondo reale di figure geometriche note (prismi, piramidi, alcuni tipi di poliedri, cilindri, coni, sfere) e loro descrizione con un linguaggio appropriato e una terminologia progressivamente sempre più specifica.
- Proprietà essenziali relative a rette e piani nello spazio e loro riconoscimento in situazioni concrete.
- Analisi con strumenti intuitivi di forme, sezioni e sviluppi piani di semplici poliedri e solidi di rotazione.
- Esempi di semplici dimostrazioni di proprietà di prismi e piramidi.
- Parallelismo e perpendicolarità nello spazio.
- Diedri e angoloidi; proprietà (somma delle δ facce di un angoloide).

4 h Successioni.

3 h Principio di induzione.

4 h Dalla successione geometrica alla funzione esponenziale. Semplici equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

4 h Concetto intuitivo di continuità. La funzione parte intera di x . Funzioni definite a tratti.

3 h Equazioni di grado superiore al secondo e loro risoluzione numerica. Teorema di Ruffini.

2 h Concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Di seguito riportiamo i percorsi relativi ai quattro ambiti.

Notiamo che alcuni temi fondamentali nella matematica attuale, quali *Logica*, *Teoria degli insiemi* (terminologia e operazioni fondamentali), *Strutture algebriche*, non compaiono esplicitamente nelle *Indicazioni*. Riteniamo tuttavia che l'insegnante debba cogliere ogni occasione possibile per richiamare gli aspetti didatticamente significativi di questi temi (ad esempio, che solleciti l'attenzione degli studenti sulla negazione di frasi composte o quantificate, che usi in ogni contesto la terminologia appropriata, che ponga in luce analogie e differenze tra operazioni su insiemi diversi).

Aritmetica e algebra

Premessa

L'analisi delle *Indicazioni* e delle *Linee guida* per il secondo biennio evidenzia una certa disomogeneità sia nella collocazione che nella tipologia degli argomenti di studio al variare degli indirizzi; la scelta che faremo per il Nucleo *Aritmetica e algebra* è di individuare gli elementi essenziali di approfondimento del tema e le connessioni con gli altri nuclei. Osserviamo come nel secondo biennio il tema *Aritmetica e algebra* perda in parte il ruolo preminente che aveva nel primo biennio, per assumere caratteristiche di supporto strumentale (in senso ampio) per lo sviluppo degli altri nuclei, con particolare riferimento a *Relazioni e funzioni* e a *Dati e previsioni*.

È quindi opportuno coltivare una manutenzione delle conoscenze acquisite e un potenziamento delle medesime attraverso la soluzione di problemi via via più articolati e complessi. Da questo punto di vista occorre riprendere e approfondire l'esperienza degli allievi sui numeri reali, requisito indispensabile per affrontare il Calcolo infinitesimale, e sui polinomi, interpretati sia dal punto di vista algebrico che dal punto di vista funzionale. Andrà ripreso e approfondito il concetto di zero di un polinomio, nei diversi registri rappresentativi e in connessione con l'aspetto funzionale. Si sottolineeranno due modalità di risoluzione di un'equazione polinomiale: o per soluzioni algebriche esatte attraverso la scomposizione in fattori e la legge di annullamento del prodotto, o con metodi numerici approssimati, facilmente implementabili con l'aiuto del computer. Si sconsiglia di proporre classificazioni delle equazioni polinomiali al fine di indicare strategie di risoluzione specifiche al variare della tipologia di equazione considerata.

Non va tralasciato lo studio di elementi di matematica discreta e in particolare di sequenze di numeri (naturali, razionali, i), da inquadrarsi nel più ampio concetto di successione. Attraverso successioni di numeri razionali, sviluppate in contesti geometrici, scientifici ed economico o sociali, potranno essere introdotti numeri trascendenti notevoli come π ed e .

Nelle indicazioni legislative di tutti gli indirizzi è sottolineata l'importanza del *principio di induzione*. Si tratta di un concetto tutt'altro che semplice che, applicato alle dimostrazioni di proprietà numeriche, presuppone spesso buona dimestichezza con la manipolazione algebrica. Un approccio per gradi a tale concetto può partire dalle definizioni per ricorrenza, in particolare di successioni numeriche, e dagli algoritmi ricorsivi; solo quando gli allievi avranno ben compreso la differenza fra stato iniziale e passo induttivo si potrà procedere a lavorare sulle dimostrazioni.

A1 Numeri reali: Per quanto concerne l'insieme \mathbf{R} dei numeri reali si consiglia di riprendere alcune attività [m@t.abel](#) del 1° biennio (come indicato nella tabella) che per la loro completezza e profondità possono essere utilizzate in una didattica di tipo verticale, per far capire a pieno le proprietà dell'insieme \mathbf{R} e per consolidare conoscenze e competenze relative.

In particolare si punterà l'attenzione sull'ordinamento di numeri reali (confronto di numeri espressi in vario modo, riconoscimento e definizione di intervalli numerici, disposizioni di numeri sulla retta, ecc.), sulla completezza dell'insieme \mathbf{R} , sugli allineamenti decimali e sul calcolo approssimato.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

1A o Livello del mare ([m@t.abel](#))

L'attività suggerisce problemi legati alle diverse rappresentazioni dei numeri nei diversi contesti. In particolare propone di operare con la notazione scientifica e di distinguere la rilevanza della precisione e dell'ordine di grandezza nella valutazione di un numero e, contemporaneamente, di acquisire un "senso del numero" adeguato a valutare l'attendibilità di informazioni numeriche relative a situazioni reali.

2A ó Foglio A4 (m@t.abel)

Questa attività propone una prima costruzione dei numeri reali, che sarà poi approfondita con l'attività "Numeri sulla retta". Perché, quando si fotocopia un foglio A4, lo si può ingrandire esattamente su un foglio A3? E che c'entra questo con la matematica? A partire da queste domande si sviluppa un percorso che mostra la necessità di uscire dal mondo dei numeri razionali e costruirne di nuovi: i numeri irrazionali. Il percorso prosegue mostrando come sia possibile rappresentare mediante allineamenti decimali un qualsiasi numero reale e come si possano eseguire calcoli tra questi. L'attività integra aspetti di problem solving, di dimostrazione, di invenzione, di discussione matematica.

3A ó Numeri sulla retta (m@t.abel)

Si propone una sistemazione dei concetti relativi all'ordine e alla densità degli insiemi numerici, e alla compatibilità delle operazioni, in particolare della moltiplicazione, rispetto all'ordine. Le proposte di laboratorio ruotano attorno alla rappresentazione dei numeri sulla retta, a partire dai razionali, per estendersi poi ad alcuni numeri irrazionali (le radici quadrate di naturali) ed infine ai reali. Un percorso guidato mira a superare le difficoltà degli alunni nel corretto confronto fra frazioni e numeri decimali. Si esaminano situazioni che sono spesso causa di errori, come il confronto tra numeri decimali con un numero diverso di cifre decimali (ad es. 3,2 e 3,12), e la moltiplicazione tra numeri minori di 1 (in cui il prodotto è minore dei fattori).

4A ó Trascendenti (m@t.abel 2° biennio)

Le attività partono da una breve sintesi storica che inquadra il problema complessivo della natura dei numeri, che ha avuto inizio con la scoperta dei numeri irrazionali da parte della scuola pitagorica. Si passa poi ad analizzare più in dettaglio i numeri costruibili con riga e compasso, che sono un sottoinsieme dei numeri algebrici. Così si studiano la radice di 2 e il rapporto aureo come esempi di numeri irrazionali soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti interi. Infine, si studiano e e e come esempi di numeri trascendenti, con cenni a storia, approssimazioni successive, crescita esponenziali ecc.

5A - Un numero misterioso: π (UMI ó Matematica 2003)

http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/12_IL_N.pdf

6A - Perché è importante il numero e ?

<http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/numeroe>

La lezione parte da problemi di capitalizzazione in regime di interesse composto per arrivare gradualmente al numero e , mostrandone l'importanza nei processi di crescita continua.

7A - Le potenze nelle prove di valutazione

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/Le_potenze_nelle_prove_di_valutazione

A2 ó A3 Le successioni. Il Principio di induzione

Alla base delle successioni e del principio di induzione ci sono le proprietà dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Attraverso le successioni possono essere descritti e modellizzati molti fenomeni naturali; la definizione per ricorrenza non è un artificio matematico [...] infatti molti fenomeni del mondo reale hanno un loro ritmo naturale (ad esempio con un intervallo di un anno) e spesso la situazione che si verifica a un certo tempo dipende in modo ben determinato da quella del tempo precedente. (G. Prodi, E. Magenes: *Elementi di Analisi matematica*; D'Anna ed., 1982)

Tra i modelli più significativi di successione individuamo le aritmetiche e le geometriche.

Si arriverà progressivamente alle dimostrazioni per induzione, non semplici da comprendere per gli allievi, dopo avere lavorato molto sul passaggio dalle definizioni per ricorrenza alle definizioni mediante termine generale.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

0B ó L'induzione in matematica: Dagli anagrammi alla torre di Hanoi ([m@t.abel](#) 2° biennio)

L'attività prende avvio con un problema sugli anagrammi per arrivare alla definizione ricorsiva del fattoriale.

Altri esempi portano ad introdurre il Principio d'induzione. Si usa tale principio, incluso tra gli Assiomi di Peano, per dimostrare alcune proprietà delle successioni aritmetiche e geometriche, ma anche in altri diversi contesti.

L'attività si conclude con un'applicazione del principio di induzione alla costruzione di algoritmi ricorsivi.

1B ó Successioni numeriche: teoria, esempi ed applicazioni

P. Boieri, *Successioni numeriche: teoria, esempi, applicazioni*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 35 A-B, Nov./Dic. 2012, pp. 639-656.

Disponibile liberamente in <http://www.centromorin.it/>, al link Rivista, Indice storico generale, 2012

2B ó La somma dei primi numeri naturali (Matematica 2003)

http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/MAT_2011.pdf

3B ó Tasselli del domino e induzione (Matematica 2003)

http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/14_TASSE.pdf

4B ó $0, n, n + 1, \dots, \infty$ (Matematica 2004)

In continuità con l'attività Tasselli del domino e induzione si intende illustrare in maniera rigorosa, a partire dalla risoluzione di problemi, il procedimento che utilizza la dimostrazione per induzione.

5B ó Affrontiamo l'infinito (Matematica 2004)

Questa attività si colloca nel contesto delle problematiche filosofiche, di particolare rilevanza storica, che costituiscono un punto di partenza per un approccio all'infinito.

L'attività ha lo scopo di introdurre le problematiche relative all'infinito, richiamando vari concetti già affrontati negli anni precedenti.

Il punto di partenza è costituito dal classico paradosso di Achille e la tartaruga, presentato tramite la lettura di un testo di storia della filosofia che illustri il pensiero di Zenone, seguita da una proposta di lavoro che, attraverso l'analisi delle somme parziali, conduca a comprendere come la somma di infiniti termini possa essere finita.

Le problematiche relative all'infinito possono essere ulteriormente approfondite con lo studio di una delle possibili approssimazioni di scoperte da Eulero.

A4 ó A5 Polinomi a coefficienti reali. Risoluzione di equazioni di secondo grado.

A proposito di equazioni e disequazioni si concorda con il fatto che esse vadano trattate mantenendo una forte connessione fra il grafico di una funzione, l'interpretazione dell'andamento, il collegamento di questo con l'espressione algebrica della funzione, gli aspetti numerici, e l'analisi di momenti particolari di questo andamento che corrispondono agli zeri (cioè alle equazioni), al segno (cioè alle disequazioni) (Matematica 2003, *Introduzione a Relazioni e funzioni*.)

Ci pare tuttavia che non si possa prescindere dalla formalizzazione algebrica della formula risolutiva di un'equazione di secondo grado, focalizzando l'attenzione sul fatto che qualunque equazione di secondo grado che abbia soluzioni reali può essere risolta mediante scomposizione in fattori. In particolare un'equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ si può ricondurre alla forma $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, da cui la formula risolutiva. Il collegamento con il grafico della funzione di equazione $y = ax^2 + bx + c$ permetterà di dare significato geometrico al discriminante $b^2 - 4ac$ e alla frazione $-\frac{b}{2a}$.

Si raccomanda di non esaminare casi algebrici particolari di equazioni di secondo grado se non riferiti al grafico delle funzioni corrispondenti e di non insistere sulla cosiddetta "formula ridotta". Un approccio storico all'evoluzione dei metodi risolutivi per le equazioni di secondo grado può essere significativo.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

1D ó Funzioni polinomiali (MaCoSa)

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/funzpol/funzpol.htm>

Nell'attività indicata poniamo l'attenzione sui seguenti aspetti: scomposizione di polinomi in fattori, divisione fra polinomi, Teorema del resto.

Il titolo dell'attività segnalata (funzioni polinomiali) suggerisce come l'argomento vada trattato mantenendo una costante attenzione ai diversi registri rappresentativi. Può collocarsi tuttavia nell'ambito numerico la divisione fra due polinomi, generalizzazione della divisione fra numeri, la scomposizione di un polinomio in fattori a coefficiente reale, la ricerca delle radici con metodi algebrici e satti con metodi numerici approssimati.

2D - Risoluzione di equazioni: metodi algebrici e metodi per approssimazioni numeriche (MaCoSa, sempre all'indirizzo delle funzioni polinomiali)

3D ó L'algebra si sposa con la geometria (Matematica 2003)

http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/11/MAT_2009.pdf

4D - Ma dove si azzera? (Matematica 2003)

Il metodo di bisezione e la risoluzione di equazioni algebriche con l'utilizzo del foglio elettronico.

5D ó Una scatola da costruire (Matematica 2004)

Da un problema alla soluzione approssimata di equazioni.

6D ó Fare matematica con i documenti storici (IPRASE, pag. 36 e oltre: Una ricetta per risolvere un'equazione)

http://try.iprase.tn.it/old/in05net/upload/doc/libri/U1011t3n673_Mat_storici_insegnanti.pdf

A6 Il problema del contare

Anche il *Calcolo combinatorio* fa parte di questo tema. A nostro parere, il Calcolo combinatorio non va finalizzato al calcolo delle probabilità, così come non deve essere ridotto a un'appendice dell'analisi matematica e trattato al termine del percorso scolastico, come nei programmi del vecchio liceo scientifico. È invece un importante esempio di *Matematica discreta* che è opportuno sviluppare quanto prima.

Si consiglia di affrontare l'argomento mediante problemi; si segnalano in particolare:

- il problema di contare e/o elencare tutti gli anagrammi di una parola (formata dapprima da lettere non ripetute, e successivamente anche da lettere ripetute),
- il problema di contare e/o descrivere tutti i percorsi tra due punti di un reticolo quadrato, ponendo dei vincoli sui possibili movimenti.

Si consiglia inoltre di utilizzare i grafi ad albero per gestire i problemi, almeno nei casi semplici: questi permettono di fare congetture sulle formule, e, volendo, anche sugli algoritmi che consentono di elencare tutti i casi previsti (ad esempio, con riferimento ai problemi precedenti, tutti gli anagrammi di una data parola o tutti i percorsi tra due punti assegnati). Solo dopo queste attività è significativa l'introduzione della terminologia specifica e delle formule relative.

Il calcolo combinatorio andrà anche visto come strumento efficace per risolvere problematiche legate al campionamento da popolazioni finite in contesti diversi quali ad esempio interviste per sondaggi, controllo della qualità di prodotti. [collegamento con *Dati e Previsioni*]

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

1E ó L'induzione in matematica: Dagli anagrammi alla torre di Hanoi (m@t.abel 2° biennio)

Attività già citata a proposito dell'induzione.

2E ó <http://web.math.unifi.it/users/ricci/ssis/EMPOLI/anichini/calcomb.pdf>

Si tratta di una presentazione del calcolo combinatorio e del suo utilizzo, corredato da un buon numero di esempi e problemi, e riferimenti storici.

Bibliografia e sitografia

<http://www.umi-ciim.it/wordpress/wp-content/uploads/2013/10/Mat2003.zip>

http://risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/

<http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica>

<http://www.centromorin.it>

<http://macosa.dima.unige.it>

<http://try.iprase.tn.it>

<http://web.math.unifi.it/users/ricci/ssis/EMPOLI/anichini/calcomb.pdf>

G. Prodi, E. Magenes: *Elementi di Analisi matematica*; D'Anna ed., 1982

P. Boieri, *Successioni numeriche: teoria, esempi, applicazioni*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 35 A-B, Nov./Dic. 2012, pp. 639-656.

Geometria

Premessa

Si rinnova anche per il secondo biennio il consiglio e l'invito a non trascurare la Geometria, ma di dedicare a essa un tempo equilibrato. Anche se in tutti gli indirizzi liceali (tranne quelli del Liceo scientifico, Liceo scientifico con Opzione scienze applicate e Liceo delle scienze umane con Opzione economico o sociale) non si potrà, con 2 ore settimanali, dedicare un tempo molto esteso a essa, è sconsigliato ridurla a una presenza poco significativa, perché la Geometria è una parte fondamentale del curriculum di matematica e offre la base intuitiva per una visualizzazione di molti dei concetti matematici che si riscontrano sia nel mondo reale che negli altri ambiti di contenuto (*Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*).

Nelle *Linee generali e competenze* di tutti gli indirizzi previsti dalle *Indicazioni nazionali* si riconosce un posto significativo al ruolo delle competenze geometriche:

- 1- gli elementi della geometria del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

- 2- gli elementi della geometria analitica cartesiana;

- Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

Negli *obiettivi specifici di apprendimento* del secondo biennio, comuni a tutti gli indirizzi, nell'ambito della Geometria si fa riferimento alle coniche, alle proprietà del cerchio e della sua area, alle funzioni goniometriche, ai teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli, agli elementi di base della Geometria dello spazio.

Un ruolo centrale in tutti gli ambiti della Scuola secondaria di II grado, in particolare in *Geometria*, deve essere assegnato all'argomentazione e alla congettura per arrivare gradualmente al significato di dimostrazione e, con molta prudenza, di una teoria in matematica. A questo proposito quello che è scritto nelle *Indicazioni nazionali* per il primo biennio, in coerenza con il modo in cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica, è un suggerimento opportuno anche per gli anni successivi.

Per dare significato ai concetti teorici in Geometria e per stimolare la formulazione di congetture e l'attività di costruzione di modelli matematici è molto utile far sperimentare agli alunni l'uso di strumenti e modelli concreti (costruzioni con riga, squadre, compasso; costruzioni ottenute tramite piegatura della carta, strumenti per tracciare le coniche, macchine matematiche; modelli di solidi costruiti con cartoncino, cannucce, materiali in commercio per la costruzione di poliedri, ...).

Un ruolo particolare nell'apprendimento e nell'insegnamento della Geometria può essere giocato dalle tecnologie, in particolare i software di Geometria Dinamica, che permettono di fare esperienze molto efficaci, sia come costruzione di significato sia come approccio e sviluppo delle capacità di intuizione e visualizzazione mentale di oggetti geometrici nello spazio.

La Geometria ha un suo specifico contenuto, ma andrà collegata in modo sistematico agli altri ambiti, senza introdurre artificiali separazioni tra di essi. Si deve trasmettere agli allievi che la Geometria non è una parte isolata della matematica.

10 h (G1, Coniche): Si propone lo studio delle coniche attraverso una introduzione che ne evidenzia la natura sia di sezioni che di luoghi geometrici. A tale scopo è indispensabile familiarizzare con la forma di queste curve osservandole nei vari contesti intorno a noi e poi riproducendole come sezioni di un cono circolare, ad esempio facendo uso di software. Si prosegue con costruzioni, realizzate con vari strumenti e strategie (ellisse del giardiniere, carta piegata, conicografi [strumenti per tracciare le coniche], software geometrico) di luoghi geometrici che hanno la stessa forma delle curve osservate e identificate come coniche. Dopo averne sottolineato le proprietà

caratteristiche, si passa a determinare le loro equazioni in opportuni riferimenti cartesiani ortogonali.

Questa proposta didattica sulle coniche mira a evitare che le coniche vengano identificate solo con le loro equazioni e per questo motivo si invita a procedere a una introduzione di tipo generale se pur breve e condotta in modo prevalentemente intuitivo e costruttivo anche negli Istituti Tecnici e Professionali, e nei Licei dove l'orario di Matematica consiste di due ore settimanali.

Durante tutto il percorso è importante esemplificare ed evidenziare significativi collegamenti con la Fisica, l'Astronomia, il Disegno e la Storia dell'arte.

Nei contesti in cui si ritenga importante privilegiare lo studio delle coniche si può proporre, come approfondimento, la problematica relativa alla costruzione e alla determinazione delle rette tangenti o al calcolo di aree di superfici delimitate anche da archi di coniche (area del cerchio, area di un segmento parabolico, area dell'ellisse), eventualmente in chiave storica.

Un altro possibile approfondimento può consistere nel proporre argomentazioni e dimostrazioni che giustificano il collegamento tra la definizione delle coniche come sezioni di un cono e quella come luoghi geometrici supportando la visualizzazione in 3D mediante un software di geometria dinamica, o attraverso modelli concreti, quali quelli presenti in vari musei e mostre di Matematica che sarebbe auspicabile potessero essere meta di visite di istruzione.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

Attività di Matematica 2003:

- Tutte le parabole sono simili?, nell'ambito *Spazio e figure*
- Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo, nell'ambito *Spazio e figure*

Attività di [m@t.abel](#) per il primo biennio:

- Superfici comode e scomode, nell'ambito *Geometria*
- Tangram e tassellazioni, nell'ambito *Geometria*

Attività di [m@t.abel](#) per il secondo biennio:

- Coniche dallo spazio al piano, nell'ambito *Geometria*
- Alla conquista dello spazio, nell'ambito *Geometria*
- Angoli e triangoli: mondo reale e funzioni, nell'ambito *Geometria*
- Anche i proiettili hanno leggi, nell'ambito *Relazioni e funzioni*.

Consigli e sconsigli:

- Si consiglia in ogni caso di privilegiare l'obiettivo di far acquisire agli studenti la conoscenza delle coniche e il significato geometrico delle loro principali caratteristiche quali per esempio l'eccentricità.
- Nel piano cartesiano si consiglia di limitarsi a trattare ellissi e iperboli riferite ai propri assi o nel caso delle iperboli equilatera riferite ai propri asintoti e parabole con l'asse parallelo ad uno degli assi del riferimento. Importante è che gli studenti giungano a saper passare con consapevolezza dalle equazioni alla rappresentazione grafica e viceversa.
- Nel piano cartesiano si sconsiglia di proporre problemi riguardanti posizioni reciproche di intersezioni o di tangenza tra coniche e anche casi complessi tra coniche e rette.

10 h (G2, Trigonometria):

Nel percorso della secondaria di secondo grado la trigonometria nasce come conseguenza naturale della geometria euclidea, permettendo di calcolare elementi di triangoli dei quali la geometria euclidea dimostra l'esistenza e l'unicità. Inoltre pone le basi intuitive per la definizione e lo studio delle funzioni circolari, importanti sia dal punto di vista teorico che applicativo.

Si ritiene quindi che l'argomento sia significativo e vada affrontato nei suoi aspetti essenziali. Il percorso di trigonometria qui proposto parte dall'introduzione di seno, coseno, tangente di angoli

acuti come rapporti tra lati di triangoli rettangoli simili. In questo modo si potranno fin da subito applicare i concetti affrontati a problemi che comportino la risoluzione di triangoli rettangoli. Attraverso l'uso della circonferenza goniometrica si estenderà poi la definizione delle funzioni goniometriche ad angoli qualsiasi, evidenziando il significato geometrico della periodicità e delle simmetrie delle funzioni goniometriche.

Infine si proporranno i teoremi classici che permettono la risoluzione di triangoli qualsiasi, evidenziandone sia il legame con la geometria euclidea, che l'aspetto algoritmico. Si rifletterà ad esempio sul legame tra il teorema dei seni e la geometria del cerchio, e sul teorema del coseno come generalizzazione del teorema di Pitagora. Riguardo alla risoluzione dei triangoli si coglieranno le occasioni per evidenziare collegamenti tra le proprietà essenziali e i criteri di congruenza dei triangoli e gli strumenti della trigonometria.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Attività di Matematica 2003:

- La trigonometria e il mondo reale, nell'ambito *Spazio e figure*

Attività di [m@t.abel](#) per il secondo biennio:

- Angoli e triangoli: mondo reale e funzioni, nell'ambito *Geometria*

(L'attività è molto ricca e completa. Inoltre all'interno contiene link ad altre attività)

Altre attività:

Breve storia della Trigonometria di Enrico Giusti

<http://web.math.unifi.it/archimede/trigonometria/trigonometria/prima.html>

Corso di trigonometria di David Joyce

<http://www.clarku.edu/~djoyce/trig>

Lezioni su Treccani Scuola a cura di Daniela Valenti

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html

Circonferenza: Pi greco e i radianti

Trigonometria: cominciamo con i triangoli rettangoli

Trigonometria: la circonferenza goniometrica

Trigonometria. E se il triangolo non è rettangolo?

Trigonometria e luce: una lezione interdisciplinare

Consigli e sconsigli:

Consigli:

- evidenziare la stretta connessione con la geometria euclidea piana, della quale la trigonometria rappresenta l'aspetto algoritmico;
- partire da situazioni e problemi reali;
- fare uso di elementi di storia (della matematica, dell'astronomia, della geodesia, della navigazione);
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.

Sconsigli:

- evitare il proliferare di formule, evidenziando piuttosto che le relazioni in trigonometria si possono ricondurre tutte a poche relazioni fondamentali;
- evitare problemi inutilmente macchinosi;
- limitare l'uso di parametri allo stretto necessario evitando sterili casistiche e formalismi.

10 h (G3, Geometria dello spazio):

Il percorso propone di rivalutare questo argomento fondamentale della Geometria, inizialmente in modo intuitivo e costruttivo, con l'uso di materiale concreto e di software di Geometria.

Si ritiene importante guidare gli studenti a sapere riconoscere le forme dello spazio direttamente e attraverso loro diverse rappresentazioni, a saper visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, a saper rappresentare sul piano una figura solida, a saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni.

Lo studio delle figure e delle loro proprietà sarà proposto in modo da far acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, dimostrare, í).

Negli indirizzi scolastici che hanno un orario settimanale più adeguato si potrà proporre un maggiore approfondimento e la dimostrazione di alcune proprietà fondamentali.

Dove invece l'orario settimanale obbliga a un percorso essenziale, nel secondo biennio ci si limiterà allo studio degli enti fondamentali della Geometria dello spazio, in particolare rette e piani, e delle loro reciproche relazioni. Si fa presente tuttavia che anche in questi indirizzi sarà opportuno al quinto anno completare il percorso di Geometria tridimensionale con lo studio dei poliedri e dei solidi di rotazione elementari, attraverso i quali i concetti affrontati nel secondo biennio assumono significato perché arriva a una sua prima conclusione la parte riguardante la Geometria dello spazio, sia pure in modo elementare.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Attività di Matematica 2003:

- Simmetrie nei poliedri, nell'ambito *Spazio e figure*
- Equivalenza nello spazio, nell'ambito *Spazio e figure*.

Attività di [m@t.abel](#) per il secondo biennio:

- Simmetrie nei poliedri, nell'ambito *Geometria*
- Alla conquista dello spazio, nell'ambito *Geometria*.

Consigli e sconsigli:

- Non partire da un'impostazione assiomatica della Geometria dello spazio, ma mettere in evidenza l'importanza di alcuni teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; questo risulta impossibile, non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti: dimostrare tutto è come non dimostrare nulla.

- Fare ricorso ad ampie ammissioni di carattere intuitivo.

- Argomentare e congetturare vengono prima di dimostrare.

- Sottolineare che la Geometria rappresenta il punto d'incontro tra la matematica intesa come teoria e la matematica intesa come serbatoio di modelli [da C. Mammana, V. Villani (editors), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, Kluwer, 1998, p. 338]

- Far vedere come la Geometria sia connessa agli altri ambiti (*Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*) e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro.

- La Geometria non è un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi; è necessario presentarla come un ambito molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale.

- Si sconsiglia di trascurare la Geometria: vuol dire privare gli allievi di un ambito estremamente importante per la formazione matematica e tarpare le ali anche agli altri ambiti del sapere matematico.

Bibliografia e sitografia

- Boieri P., Tomasi L., 2009, *In laboratorio con Cabri 3D. 25 schede di geometria dello spazio*, Loescher, Torino.
- Cundy H. M., Rollett A. P., 1974 (trad. it.), *I modelli matematici*, Feltrinelli, Milano.
- Dedò M., 1996, *Trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Bologna.
- Dedò M., 2010, *Galleria di metamorfosi*, Mimesis, Milano.
- Euclide, 1970, *Gli Elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), UTET, Torino.
- Freguglia P., 1999, *La geometria fra tradizione e innovazione. Temi e metodi nell'età della rivoluzione scientifica 1550-1650*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Furinghetti F., 1995-1996, Insegnamento/apprendimento della geometria nella scuola secondaria superiore. Riflessioni su strumenti e prescrizioni a disposizione degli insegnanti, *L'insegnamento della Geometria*, Seminario di formazione per docenti, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Quaderno del MPI (disponibile sul web: www.liceo-vallisneri.lu.it).
- Giusti E., 2001, *Pitagora e il suo teorema*, Il Giardino di Archimede, Firenze.
- Hilbert D.; Cohn Vossen S., 1991 (trad. it.), *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Hilbert D., 2009 (ultima ediz.it.), *Fondamenti della geometria*, a cura di R. Betti, FrancoAngeli, Milano.
- Manara C.F., 2007, Che cosa è la geometria, *Emmeciquadro*, n. 31.
- Maor E., 1998, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press (disponibile on line in questo sito: <http://press.princeton.edu/books/maor/>)
- Mariotti M.A., 2005, *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*, Pitagora, Bologna.
- Prodi G., Mariotti M.A., Bastianoni A.M., 2008, *Scoprire la matematica. Geometria dello spazio e oltre*. Ghisetti e Corvi, Milano.
- Prodi G., Sainati M.T., Sciolis M., 2005, *Scoprire la matematica. L'angolo protagonista. Similitudine, Affinità, Trigonometria. Problemi della realtà*. Ghisetti & Corvi, Milano.
- Sundara R., 1966, *Geometric exercises in paper folding*, Dover, New York.
- Villani V., 1985, *La geometria: dallo spazio al piano*, Quaderno n.2 del CNR, Dipartimento di Matematica, Pisa.
- Villani V., 1995, Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 18 A-B, n.6, 669-688.
- Villani V., 2006, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica*, Pitagora, Bologna.
- Villani V., 2006, Insegnare Geometria, Seminario del 30 ottobre 2006 in *Pianeta Galileo*, Pisa [scaricabile dalla rete].
- Villani V., 2007, Riflessioni su possibili percorsi nell'insegnamento della geometria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 30 A-B, n.6, 624-644.

Sitografia e materiali (software, riviste, ecc.)

http://risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/

[sito dell'INDIRE, da cui scaricare i materiali e le attività del Piano di formazione dei docenti di matematica m@t.abel e PON m@t.abel]

<http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/>

[Sito del Progetto Polymath, gestito dal Politecnico di Torino, da cui scaricare esempi di lezioni, articoli, problemi, ecc.]

http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/AHSME_Problems_and_Solutions

[sito "The Art of Problem Solving" da cui scaricare i problemi assegnati nelle gare AHSME-American High School Mathematical Examination negli USA]

<http://www.macchinematematiche.org/>

[sito dell'Associazione *Macchine Matematiche* di Modena; fonte di una quantità enorme di materiali sulle macchine matematiche, simulazioni, coniche, curve, modelli geometrici, ecc. Oltre al sito si consiglia la visita del Museo delle Macchine Matematiche presso l'Università di Modena]

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html>

[Sito di David E. Joyce, Clark University, MA, USA dove è possibile trovare, tra gli altri eccellenti materiali, gli *Elementi* di Euclide on line

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

e un breve corso di Trigonometria on line: <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/>]

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

[Sito in lingua inglese particolarmente utile per la storia della matematica della University of St. Andrews, Scotland, GB]

http://www.scuoladecs.ti.ch/ordini_scuola/materie/matematica/matematica-competenze.htm

[Scuoladecs: sito didattico del Canton Ticino; sono presenti delle ottime attività didattiche]

<http://macosa.dima.unige.it/>

[sito del Gruppo MACOSA (MAtematica per CONoscere e per SApere) da cui è possibile scaricare un'opera in più volumi che copre il programma del Primo biennio delle Scuole Superiori, che comprende problemi, materiali, indicazioni didattiche, ecc.]

<http://web.unife.it/progetti/fardicono/nctm/>

[su questo sito, gestito dall'Università di Ferrara, è possibile reperire la traduzione in italiano degli Standards NCTM americani (la versione preliminare)]

<http://web.unife.it/progetti/fardicono/flatlandia/archivi.html>

[su questo sito, ospitato presso l'Università di Ferrara, si trovano i problemi di Geometria elaborati dal Gruppo di "Flatlandia"]

<http://www.treccani.it/scuola/lezioni/>

[sito della Treccani Scuola: contiene una gran quantità di materiali (non solo per la matematica), tutti facilmente scaricabili. Vedi in particolare le "Lezioni di Matematica" a cura di D. Valenti]

<http://www.invalsi.it>

[sito dell'INVALSI da cui è possibile scaricare molti materiali didattici, tra cui i problemi delle Prove Invalsi, i problemi dell'OCSE-PISA, i quadri di riferimento Invalsi di Matematica, ecc.]

<http://www.liceovallisneri.it/istituto/pubblicazioni.html>

[Sito del Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri" di Lucca da cui sono scaricabili alcuni lavori tra cui quelli citati qui di seguito

- *L'insegnamento della geometria* (2 tomi), M.P.I. - U.M.I. - Quaderni n. [19/1](#) e [19/2](#) 1995-96;
- *Geometria e multimedialità*, M.P.I. - U.M.I. - Quaderno n. 35 (Scuole Sec. II grado), 1998-99]

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2003.zip>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare liberamente la pubblicazione *Matematica 2003*]

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2004.zip>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare liberamente la pubblicazione *Matematica 2004*]

<http://olimpiadi.dm.unibo.it>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare i testi dei quesiti delle Olimpiadi di Matematica]

<http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegno.php?id=14>

[sito del Convegno "La storia delle matematiche in classe dalle materne alle superiori", 10-12 marzo 2011, dove c'è il link a tutti i materiali prodotti per il convegno]

<http://www.math.unifi.it/archimede>

[sito de "Il Giardino di Archimede", un museo per la matematica; molti percorsi dedicati in particolare alla Geometria]

<http://www.centromorin.it/>

[sito del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" è possibile scaricare gratuitamente tutti gli articoli della rivista, tranne le ultime due annate, oltre ad altri materiali]

<http://www.math-armt.org/>

[Tra i materiali citiamo anche, come fonte di problemi, il "Rally matematico transalpino" e, come fonte di spunti didattici, il "Rapporto Villani-Bodin 2003" su <http://www.emis.de/projects/Ref/>]

Software

Tra i diversi software per la geometria (e non solo) ricordiamo in particolare:

- Software GeoGebra (gratuito)
- Software Google SketchUp per la modellizzazione in geometria solida (versione base gratuita)
- Software Cabri II Plus e Cabri 3D (non gratuiti)
- Software Cinderella (versione base gratuita)
- Software TI-Nspire della Texas Instruments (non gratuito).

Riviste

Tra le riviste italiane di carattere didattico citiamo in particolare:

- *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin [a pagamento, ma tutti gli articoli sono scaricabili gratuitamente, tranne le ultime due annate; vedi il sito www.centromorin.it]
- *Progetto Alice* [a pagamento]
- *Archimede* [a pagamento].

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2004.zip>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare liberamente la pubblicazione *Matematica 2004*]

Relazioni e funzioni

Premessa

Il concetto di funzione è già stato introdotto e studiato nel primo biennio sia nella forma algebrica di una particolare relazione fra grandezze, sia nella forma grafica, sia nella forma di tabulazione numerica; si tratta quindi di consolidare, approfondire e sistemare conoscenze già in possesso degli studenti e integrarle con nuovi contenuti.

Il percorso che viene proposto prende le mosse dal lavoro già fatto per il primo biennio e il ripetersi di molte attività m@t.abel e Ma.Co.Sa. indica una continuità fra i due livelli: in effetti molte delle attività segnalate al primo biennio possono, e forse devono, essere attuate in due fasi, una prima fase di approccio, di scoperta di concetti, di attribuzione di significato a una legge espressa in termini algebrici, e una seconda fase nel secondo biennio, più approfondita, in cui si suppone che gli strumenti dell'algebra e della modellizzazione siano già stati acquisiti.

Probabilmente il nucleo *Relazioni e funzioni* in questo secondo biennio è quello che più si distribuisce sulle attività degli altri nuclei, assumendo quindi un ruolo unificante della matematica, generalmente frammentata in tanti segmenti. Basti pensare alla risoluzione di un problema geometrico, alla ricerca di massimi o minimi, alla ricerca di una curva che meglio approssima una serie di dati, al passaggio dalle funzioni definite in \mathbf{N} alle stesse definite in \mathbf{R} , alla interpretazione delle soluzioni di un sistema come punti di intersezione fra due curve e tanti altri esempi ancora.

La sovrapposizione di temi afferenti a nuclei diversi in parte risolve il problema tempo evitando di ripetere lo stesso concetto in contesti diversi, in parte introduce la necessità di impadronirsi di strumenti più fini per affrontare i problemi, quindi rappresenta una ricchezza che va sfruttata al meglio.

Sono stati ripresi gli elementi della geometria analitica (retta, parabola, iperbole), e a partire da questi sono state studiate le funzioni che derivano da queste per trasformazioni del piano (iperbole traslata, funzione omografica) inserendo i concetti di asintoto, di limite e di continuità ma sempre in forma 'intuitiva', senza la preoccupazione di dare definizioni rigorose.

Si propone di arrivare allo studio di una funzione minimamente complessa, ad esempio $y = x + 1/x$, $y = 1/f(x)$, $y = e^{f(x)}$, $y = \log(f(x))$, $y = \text{asin}(bx + c) + d$, a partire dallo studio delle funzioni elementari che la compongono, utilizzando tutte le proprietà che si possono ricavare dal loro grafico (dominio, simmetrie, crescita, segno, zeri), riducendo al minimo l'uso della tradizionale procedura di studio di funzione e privilegiando l'interpretazione dei grafici di funzioni più semplici.

Si consiglia anche di utilizzare i grafici di funzioni per risolvere equazioni (e disequazioni) sia che esse abbiano soluzioni esatte o approssimate.

Nel caso di funzioni trigonometriche (e relative equazioni) si ritiene di limitare al massimo le formule da studiare, privilegiando le trasformazioni del piano, le formule di addizione e la normalizzazione.

L'uso di un software di grafica sarebbe vivamente consigliato per prendere familiarità con la rappresentazione grafica di una funzione e per imparare a 'leggere' un grafico e le sue proprietà.

Per quanto riguarda il concetto di limite finito per x che tende a un valore finito sarebbe opportuno aspettare il momento in cui questo diventa effettivamente necessario, cioè all'introduzione della derivata; questo permette di attribuirgli un senso (si pensi all'interpretazione geometrica) e serve per il calcolo. Resta fermo il fatto che si continui a considerare le successioni coi loro limiti, in particolare il concetto di frazione generatrice di un numero periodico, i numeri π , e , ecc.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

L'area dei rettangoli isoperimetrici (Matematica 2003)

Fare una lettura dal grafico delle proprietà di crescita e decrescenza di una funzione e dell'esistenza di massimi e minimi.

Funzione1, funzione2

Ma.Co.Sa <http://macosa.dima.unige.it>

Proposte di attività per consolidare il concetto di funzione, la composizione, le funzioni inverse

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/diseq/diseq.htm>

Il moto di un proiettile (Matematica 2003)

Come tradurre un problema di fisica in termini di funzioni quadratiche, come riconoscere negli estremi e negli zeri le proprietà del moto.

La somma dei primi n numeri naturali

(Matematica 2003), nell'ambito *Numeri e algoritmi*

Quante rette per n punti?

(Matematica 2003), nel nucleo trasversale *Argomentare, Congetturare, Dimostrare*

Dalle espressioni algebriche alle funzioni (Matematica 2003)

Dalla tabulazione di una funzione razionale allo studio del dominio, degli asintoti, del comportamento per valori molto grandi di x .

Le funzioni polinomiali

Ma.Co.Sa <http://macosa.dima.unige.it>

L'algoritmo per la divisione dei polinomi

(Matematica 2003), nell'ambito *Numeri e algoritmi*

La fabbrica dei cioccolatini (Matematica 2003)

Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/trigo/trigo.htm#5>

LEZIONI TRECCANI (a cura di Daniela Valenti)

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html

[Circonferenza: e i radianti](#)

[Video e animazioni guidano gli studenti]

La concentrazione di un medicinale (m@t.abel)

Esempi di crescita non lineare (nel discreto).

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/exp/exp.htm#14>

LEZIONI TRECCANI (a cura di Daniela Valenti) tutte le lezioni seguenti:

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html

[Dall'esponenziale al logaritmo](#) alla scoperta della funzione logaritmica e alla definizione di logaritmo.

[Proprietà dei logaritmi](#) scoprire autonomamente le proprietà dei logaritmi e ad applicarle in contesti per loro significativi.

[Perché studiare esponenziale e logaritmo in base \$e\$?](#) studiare l'andamento delle due funzioni, che incontrano poi nella risoluzione di problemi scientifici significativi.

<http://macosa.dima.unige.it/om/voci/continuo/continuo.htm>

LEZIONI TRECCANI : (Daniela Valenti) tutte le lezioni seguenti:

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html *Incontriamo problemi di ottimizzazione prima delle derivate, consente di concentrare l'attenzione sul passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico.*

http://phet.colorado.edu/sims/calculus-grapher/calculus-grapher_en.html

Software di simulazione per andamento del grafico della derivata di una funzione.

Il lancio di un paracadutista (Matematica 2004)

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2004.zip>

In situazioni problematiche, individuare relazioni significative. Avere familiarità con crescita, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione.

Bibliografia e sitografia:

Matematica 2003

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2003.zip>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare liberamente la pubblicazione *Matematica 2003*]

Matematica 2004

<http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2004.zip>

[sito dell'UMI da cui è possibile scaricare liberamente la pubblicazione *Matematica 2004*]

Siti

Attività m@t.abel

http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7

Ma.Co.Sa

<http://macosa.dima.unige.it/>

http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html

GeoGebra youtube (tutorial, channelí)

[Esempi guidati di utilizzo di GeoGebra per la geometria, l'algebra e il CAS.]

Consigli e sconsigli:

Si consiglia di:

- utilizzare tutti i registri interpretativi, numerico, algebrico, grafico, funzionale e di saper passare dall'uno all'altro,
- di imparare a leggere dal grafico tutte le informazioni su una funzione
- usare il software sia per la rappresentazione grafica di funzioni che per la manipolazione simbolica
- ove possibile, ottenere il grafico di una funzione utilizzando traslazioni, simmetrie, ecc. a partire dai grafici di funzioni già note
- risolvere equazioni e disequazioni per via grafica
- utilizzare un approccio soft ai concetti di limite e di continuità.

Si sconsiglia di:

- studiare le funzioni esclusivamente con il metodo della classica scaletta
- risolvere equazioni e disequazioni trigonometriche e logaritmiche/esponenziali nei casi più complicati.

Dati e previsioni

Premessa

I ragionamenti di tipo probabilistico e statistico sono uno strumento importante e potente della ragione. In questi tempi non avere chiarezza su nozioni come media, varianza, variabilità, correlazioni, stima, previsione è un po' come non sapere usare la moltiplicazione o la divisione.

La scarsa familiarità con la statistica e il calcolo delle probabilità porta a confondere la probabilità con l'imprecisione, la stima con l'approssimazione; invece probabilità e statistica sono strumenti precisi, che permettono di rispondere in modo attendibile a domande specifiche.

Il percorso nel secondo biennio della scuola superiore richiede che lo studente sia a conoscenza dei principali concetti della statistica descrittiva acquisiti nel percorso precedente. Quindi dovranno possedere conoscenze relative a: i dati e la loro organizzazione; distribuzione e rappresentazione; principali rappresentazioni grafiche; i valori medi; alcune misure di variabilità.

Per quanto riguarda il calcolo delle probabilità lo studente dovrebbe aver conoscenze su: caratteristiche degli esperimenti; evento impossibile, ed evento certo; eventi contrari, eventi incompatibili ed eventi compatibili; probabilità di un evento; probabilità degli eventi compatibili e incompatibili.

Dall'analisi delle *Indicazioni nazionali* e delle *Linee guida* per il secondo biennio si legge *... possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate* ed ancora *... Utilizzare, anche per formulare previsioni, informazioni statistiche da fonti diverse di natura economica per costruire indicatori di efficacia, di efficienza e di qualità di prodotti o servizi. Calcolare, anche con l'uso del computer, e interpretare misure di correlazione e parametri di regressione*. *... saprà far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico*.

La scelta che abbiamo fatto per il nucleo *Dati e previsioni* è di individuare alcuni argomenti che possano essere di base comune ai tre ordinamenti (Licei, Istituti Tecnici, Istituti Professionali), lasciando a ciascun insegnante la responsabilità della scelta di approfondimenti ritenuti necessari o opportuni.

L'introduzione delle nuove tematiche sarà anche di aiuto nel rivedere e consolidare le conoscenze e abilità conseguite nel primo biennio, relative sia al nucleo specifico che agli altri nuclei della matematica. Utili allo scopo sono lavori di gruppo su esempi tratti dalla realtà, in collaborazione con docenti di altre discipline e con l'utilizzo delle tecnologie informatiche a disposizione.

Per il Nucleo *Dati e previsioni* si è pensato di fornire ai docenti, oltre alle indicazioni descritte nel percorso didattico, una cartella contenente una ulteriore serie di indicazioni e materiali, comprensivi di esercitazioni, utili ad acquisire o approfondire conoscenze e competenze sui temi da trattare in classe.

Si è ritenuto utile offrire tale supporto, perché non in tutte le scuole esiste una tradizione consolidata nell'insegnamento della probabilità e della statistica nel curriculum della matematica e, inoltre, si è consapevoli che le tematiche trattate non sempre fanno parte del percorso universitario scelto dai docenti.

OSSERVAZIONE. Nel richiamare il concetto di funzione, applicandolo e sistematizzandolo, conviene utilizzare dati reali ricavati dagli studenti anche in collaborazione con docenti di altre discipline. In questo ambito conviene introdurre anche le nozioni di statistica legate all'analisi della dipendenza tra due caratteri quantitativi.

Analizzare distribuzioni doppie di frequenze.

Si consiglia di partire da un insieme dove i dati statistici rilevati sono coppie di valori provenienti da indagini statistiche relative a fenomeni di diversa natura osservati dagli studenti (es: voti in italiano e matematica) o reperibili da varie fonti (ISTAT, MIUR) o dati prodotti in un esperimento scientifico (laboratorio di fisica) e di trasformare insieme delle coppie di valori in una distribuzione doppia di frequenze (tabella a doppia entrata) anche utilizzando le tabelle pivot del foglio di calcolo.

[È possibile anche utilizzare l'unità [m@t.abel](#) **pivot è bello** (*Passaggio dalla matrice dei dati grezzi alle distribuzioni di frequenza e alle corrispondenti rappresentazioni grafiche (anche utilizzando adeguatamente opportuni strumenti informatici)*)]

Classificare dati secondo due caratteri e riconoscere le diverse componenti delle distribuzioni doppie.

Distribuzioni congiunte: frequenze assolute e relative. Una volta costruita la tabella doppia di frequenze si guidano gli studenti alla scoperta del significato degli elementi che in essa compaiono, riesaminando anche alcuni concetti che dovrebbero essere stati acquisiti negli anni precedenti come, ad esempio, riconoscere le unità statistiche osservate, i caratteri rilevati e le loro modalità, il significato di alcuni valori in essa riportati (frequenze congiunte, marginali). Un passo successivo, per cogliere altre informazioni, è quello di passare da frequenze assolute a frequenze relative e percentuali calcolate o rapportando le frequenze congiunte rispetto al totale, oppure rispetto ad una frequenza marginale (ad esempio si evidenzia il peso di alcune coppie di modalità sul totale o su una marginale).

In questo ambito è possibile anche fare dei richiami sui diversi modi di assegnare la probabilità ad un evento casuale.

[Collegamento con *Aritmetica e algebra* per approssimazioni e il numero di cifre decimali adatte per descrivere le diverse situazioni].

Distribuzioni condizionate relative.

La frequenza condizionata relativa è il rapporto della frequenza congiunta al totale di riga o di colonna (distribuzioni marginali). L'uso delle frequenze relative condizionate permette il confronto tra i diversi sottogruppi in cui il collettivo totale può essere suddiviso rispetto ad uno dei due caratteri, e può aiutare ad evidenziare l'esistenza di un legame tra i due caratteri presi in esame. È bene porre l'attenzione su quale dei due caratteri spiega, condizionandolo, l'altro. Lo studio delle distribuzioni condizionate è la base per lo studio della dipendenza in distribuzione o connessione che è possibile misurare qualunque sia la natura dei due caratteri della distribuzione. Per misurare il grado di dipendenza o connessione si fa ricorso a indici di sintesi basati sul confronto fra le frequenze osservate e le frequenze teoriche calcolate in caso di indipendenza. (Indice chi quadro di Pearson). È bene anche evidenziare agli studenti che se almeno uno dei due caratteri è quantitativo l'eventuale legame in dipendenza di tale carattere può essere studiato con la connessione in media.

[Collegamento con *Aritmetica e algebra* per approssimazioni e con *Relazioni e funzioni*].

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Attività di [m@t.abel](#) per il secondo biennio:

«Sono tanti, giovani e bravi! Saran poi promossi?»

L'attività si propone di condurre gli studenti ad evidenziare l'importanza dello studio della connessione tra due caratteristiche di natura qualitativa e/o quantitativa in una distribuzione doppia di frequenze.

•A proposito di valutazione scolastica, pp. 309 ó 314 (Matematica 2003)
Distribuzioni doppie, condizionate e marginali.

[Rivista *Induzioni* 24, 2002, M. G. Ottaviani: Distribuzioni statistiche doppie, pp. 39 ó 77]
(*Distribuzioni doppie di frequenze, Connessione e sue misure, Relazioni statistiche tra caratteri entrambi quantitativi; Correlazione, Regressione, Calcolo delle rette di regressione, Da r a r^2 : Analisi dell'adattamento*).

[Il file *Distribuzioni doppie.pdf* di M.G. Ottaviani è anche reperibile tra i materiali dell'unità m@t.abel •Sono tanti, giovani e bravi í saran poi promossi?• disponibile nel sito dell'Andire a breve].

•L'affondamento del Titanic, pp. 514 ó 519 (Matematica 2003)
Distribuzioni doppie, condizionate e marginali, concetto e significato di modello: connessione o non connessione, sua analisi attraverso l'indice chi quadro di Pearson.

http://www.sp.units.it/Docenti%20Materiali/DE%20CANDIDO/Lezione%2030_3.pdf

Informazioni sulle distribuzioni statistiche rispetto a due caratteri (distribuzioni doppie): unitarie e di frequenze.

Il file contiene anche le nozioni sulla Connessione fra due caratteri in una distribuzione doppia di frequenza: confronto fra distribuzioni condizionate e marginali.

Consigli e sconsigli

Consigli:

- far vedere come queste nozioni dell'ambito *Dati e previsioni* possono essere connesse agli altri ambiti (*Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Geometria*) e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro;
- partire da una situazione problematica che richiede la raccolta di un insieme di dati statistici che sono coppie di valori provenienti da indagini relative a fenomeni di diversa natura osservati dagli studenti (es: voti in italiano e matematica) o reperibili da varie fonti (ISTAT, MIUR) o dati prodotti in un esperimento scientifico (laboratorio di fisica);
- utilizzare una didattica laboratoriale invitando la classe a riflettere, in modo attivo e partecipato, sull'esperienza che si sta facendo, stimolando riflessioni, provocando osservazioni, aiutando negli esperimenti, ma evitando di dare risposte;
- dare importanza alla interpretazione dei dati e alla loro capacità (o incapacità) di dare risposta alla situazione problematica che ha motivato l'introduzione del concetto o l'attività;
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.

Sconsigli:

- evitare di trasmettere solo formule di comodo, evidenziando piuttosto che le relazioni in oggetto si possono ricondurre tutte a concetti tra essi collegati;
- evitare problemi inutilmente macchinosi;
- limitare l'uso di indici di sintesi allo stretto necessario evitando sterili casistiche e formalismi;
- evitare di introdurre la statistica e la probabilità come un insieme di calcoli su numeri inventati e senza che abbiano un significato in un contesto reale.

Correlazione fra due caratteri quantitativi: punto di vista grafico e misura della correlazione lineare.

Dopo aver accertato l'esistenza di connessione fra due caratteri in una distribuzione doppia, se i caratteri sono entrambi quantitativi, è bene rappresentare ogni unità statistica mediante la coppia di

modalità che la individua sul riferimento cartesiano, ottenendo il grafico chiamato *scatter-plot* (grafico a dispersione) o nuvola di punti. Individuare il punto di coordinate $P(\mu_x; \mu_y)$, punto di equilibrio della distribuzione o baricentro (ricordando le proprietà del valor medio). La traslazione degli assi sul baricentro rende la lettura del grafico più facile per cogliere la concordanza o la discordanza fra i due caratteri, in particolare se al crescere di un carattere tende mediamente a crescere anche l'altro (concordanza) o se al crescere dell'uno l'altro mediamente decresce (discordanza). [Collegamento con *Geometria* per le trasformazioni geometriche (traslazione assi)].

Dalla disposizione dei punti nel grafico è possibile anche condurre gli studenti all'individuazione di un modello matematico che sintetizzi la relazione fra i due caratteri rilevati. È bene far osservare agli studenti che la funzione scelta non passerà per tutti i punti osservati ma fra i punti esprimendo così un andamento in media (interpolazione statistica). Come modello di interpolazione dei dati osservati si propone la retta in quanto è uno fra i modelli più semplici da spiegare; si farà riflettere sul criterio di scelta dei parametri del modello lineare in modo che la retta individuata aderisca il più possibile ai dati osservati, rispettando i valori in ascissa, ma modificando i dati in ordinata. [Collegamento con *Relazioni e funzioni, Geometria, Aritmetica e algebra* per trasformazioni geometriche, fascio di rette, significato dei parametri del modello lineare rispetto al fenomeno studiato...].

Si giustifica in tal modo l'introduzione del metodo di interpolazione dei minimi quadrati come strumento che fa passare dai dati osservati alla costruzione della retta migliore. Il metodo viene sviluppato senza ricorrere al calcolo differenziale. Per simulazione si costruirà il fascio di rette passante per $P(\mu_x; \mu_y)$ e si calcolerà per ciascuna retta disegnata la differenza dei punti osservati in ordinata dai corrispondenti punti sulla retta (residui).

[Collegamento con *Geometria*].

Osservando che la somma di tali differenze (residui) è zero si passa a calcolare la somma del quadrato di tali differenze (per comodità indicata con Se). È bene far osservare che la somma del quadrato delle differenze porta a qualche informazione sulla capacità della retta scelta di interpolare i punti osservati.

Riportando in un grafico le diverse somme Se , in funzione di m , è possibile visualizzare il loro andamento. Ne risulterà una parabola le cui coordinate del vertice forniranno rispettivamente il coefficiente angolare della retta del fascio da scegliere e il valore dell'intercetta sull'asse verticale. Si ottiene così la retta dei minimi quadrati.

[Collegamento con *Relazioni e funzioni* per equazione della parabola e significato dei parametri. Differenze tra variabili e parametri].

Calcolo dell'indice r come rapporto fra il valore della covarianza e il suo massimo: coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson ed analisi dello stesso (insieme dei valori assunti, unità di misura, significato) e analisi dei significati di r^2 . [Collegamento con *Aritmetica e algebra*]

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Cosa ci dicono le rette ([m@t.abel](#) per il secondo biennio)

L'attività consente di arrivare alla descrizione della relazione fra due variabili attraverso la costruzione grafica e analitica di un modello lineare di sintesi e di calcolare ed interpretare gli indici collegati.

Anche le rette raccontano, pp. 330 ó 337 (Matematica 2003)

Concetto e significato di modello, correlazione e regressione.

http://www.docente.unicas.it/useruploads/001223/files/10_bis_-_relazioni_tra_due_caratteri_2.pdf

Il file presenta la relazione tra due caratteri quantitativi e la regressione lineare. Viene trattata anche l'analisi dei residui (argomento non in programma) e questo può aiutare la preparazione dei docenti.

Molti esempi permettono di chiarire i vari concetti introdotti.

<http://pellerey.unisal.it/062006.pdf>

Il file presenta il concetto di correlazione e il calcolo di due coefficienti in particolare: la r di Pearson, utilizzato nel caso si disponga di scale intervallo o di rapporto, ed il coefficiente ρ , generalmente usato nel caso di variabili ordinali.

Questo secondo indice non è previsto che venga insegnato nella scuola secondaria di secondo grado ma il suo studio può essere utile alla preparazione dei docenti.

Molti esempi permettono di chiarire i vari concetti introdotti.

Consigli e sconsigli:

Consigli:

- far notare che la forza della correlazione che esprime il legame e il verso della relazione tra i dati rilevati viene misurata con un numero, quanto più il legame è forte tanto più ha senso esprimerlo mediante una funzione che fa dipendere una variabile dall'altra;
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico anche analizzando attraverso il grafico la possibilità di interpolazioni diverse da quella lineare facendo restituire dal foglio di calcolo anche l'indice di bontà di adattamento del modello scelto. Fare osservare anche che la capacità del modello di interpretare i dati generalmente aumenta all'aumentare del numero dei parametri, ricordando che i parametri vanno interpretati e non sempre è semplice farlo.

Sconsigli:

- evitare il di trasmettere solo formule di comodo, evidenziando piuttosto che le relazioni in oggetto si possono ricondurre tutte a concetti tra essi collegati;
- evitare di introdurre algebricamente modelli diversi da quello lineare, lasciando alla tecnologia la generazione di modelli diversi e il calcolo degli indici di bontà, senza porsi il problema dell'interpretazione dei parametri ottenuti.

Indicatori statistici mediante rapporti e differenze (tale argomento è previsto nel secondo biennio solo per i tecnici e i professionali ma si suggerisce l'introduzione anche per i licei a completamento dell'analisi di distribuzioni di frequenze e di intensità)

Si propone lo studio del confronto mediante differenze e mediante rapporti, in particolare dei rapporti statistici di composizione (un esempio è la frequenza relativa), di densità (esempi sono: densità di popolazione; densità di frequenza) e di derivazione (un esempio è il rapporto tra diplomati e iscritti all'inizio del percorso scolastico) in parte già trattati al biennio e che possono coinvolgere altre discipline, nonché qualche numero indice tratto dalla lettura di articoli economici, sociali o da fonti ufficiali.

Lo studio di tale argomento può consentire una riflessione sull'unità di misura del rapporto statistico, sulla sua approssimazione e sul significato di numero puro e di variazione. È utile lavorare anche sul significato dell'operazione inversa: dal valore del rapporto alla ricerca di un dato assoluto (dalla densità di popolazione al numero di abitanti di un territorio, dalla variazione del valore di un bene in epoche successive al valore del bene stesso in una epoca, $\dot{}$).

[Collegamento con *Aritmetica e algebra*]

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Navigando tra i dati ([m@t.abel](#))

Principali rapporti statistici e vari tipi di numeri indici.

[M. G. Ottaviani: Confronto fra grandezze statistiche. File formato pdf recuperabile da questa unità [m@t.abel](#) òNavigando tra i datiö]

Confronti mediante rapporti, Confronti mediante differenze o variazioni, Confronti mediante differenze o variazioni relative, I numeri indice.

http://www.coris.uniroma1.it/materiali/10.49.55_Lezioni_Mingo_9_10.pdf

Il file descrive in modo dettagliato i principali rapporti statistici e numeri indice riportando esempi tratti anche da siti ufficiali descrivendone l'utilizzo.

Consigli e òsconsigliö:

Consigli:

- far emergere che il calcolo di rapporti statistici consente sia di interpretare e confrontare correttamente manifestazione di fenomeni nel tempo e nello spazio, sia di riflettere su approssimazione numerica, ònumero puroö e di variazione;
- far porre attenzione alla numerosità del collettivo a cui il rapporto statistico o il numero indice fa riferimento quando lo studente approssima;
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.

Sconsigli:

- evitare il di trasmettere solo formule di comodo, evidenziando piuttosto che le relazioni in oggetto si possono ricondurre tutte a concetti tra essi collegati;
- evitare problemi inutilmente macchinosi o inventati.

Campionamento casuale semplice e tecniche di campionamento

Costruire semplici spazi campionari a partire da popolazioni di piccole dimensioni (ad esempio estrarre dalla classe (popolazione), campioni di due studenti e di questi osservare il numero di componenti della famiglia) utilizzando estrazioni con e senza reinserimento ed analisi delle differenze ottenute nei campioni con le due tecniche.

Usare il calcolo combinatorio per differenti tecniche di campionamento casuale al fine di contare i campioni possibili. Nell'universo dei campioni studiare, ad esempio, il comportamento del numero medio dei componenti della famiglia (Variabile casuale media campionaria). Far riflettere gli studenti sull'informazione che può fornire la media campionaria per l'intera popolazione. Utilizzo dello strumento informatico per la simulazione delle diverse problematiche.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

I campioni si contano ([m@t.abel](#))

Come introduzione all'uso delle informazioni campionarie per fornire indicazioni su alcuni aspetti della popolazione (inferenza).

Campioni e forchette, pp. 110 ó 117 (Matematica 2004)

Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media.

Piccoli campioni crescono, pp. 118 ó 125 (Matematica 2004)

Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media. Stima puntuale ed intervallo di confidenza per la proporzione e la media.

<http://eco.uninsubria.it/webdocenti/amira/temi-avanzati/campionamento-web.pdf>

Il file analizza il sistema di indagini sociali del SISTAR e dell'ISTAT e contiene gli strumenti statistici alla base delle indagini campionarie.

Consigli e sconsigli:

Consigli:

- far ricorso ad esempi tratti dalla vita quotidiana per motivare gli studenti sull'utilità delle ricerche campionarie e sul tema dei sondaggi;
- porre attenzione sulla differenza tra i parametri della popolazione (media aritmetica, varianza) e i corrispondenti valori campionari calcolati sui campioni estratti (stime);
- far osservare che campioni diversi possono portare a conclusioni diverse;
- chiarire che uno dei problemi dell'inferenza è proprio quello di valutare fino a che punto un valore ricavato da un campione può essere una stima valida per il parametro dell'intera popolazione;
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico per le simulazioni.

Sconsigli:

- evitare misconcetti come stima = valore approssimato del corrispondente parametro della popolazione.

Probabilità totale; Probabilità condizionata; teorema di Bayes.

La probabilità è un valido aiuto per i futuri cittadini e promuove l'acquisizione di conoscenze utili a comprendere in modo consapevole e critico la realtà ed in particolare quei suoi aspetti disorientanti che sono la casualità dei fenomeni.

A partire da problemi reali o da tabelle doppie di frequenze tratte da esperienze pluridisciplinari è possibile introdurre **in modo semplice** i seguenti concetti di calcolo delle probabilità: probabilità congiunta, eventi condizionati e probabilità condizionate; teorema del prodotto, delle probabilità totali fino al teorema di Bayes.

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano m@t.abel e altri materiali in rete):

Qual è la probabilità di \acute{e} sapendo che \acute{e} (m@t.abel)

Eventi dipendenti, probabilità condizionate, teorema di Bayes.

Ripetenti promossi ed ottimi respinti, pp. 218 ó 225 (Matematica 2004)

Lettura probabilistica di distribuzioni doppie.

L'affondamento del Titanic, pp. 514 ó 519 (Matematica 2003)

Distribuzioni doppie e loro analisi anche dal punto di vista probabilistico.

<http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/10probcond.html>

Il file studia come varia la misura della probabilità, al variare della conoscenza, ovvero al crescere delle informazioni assunte in possesso di chi calcola la probabilità. Tratta della probabilità condizionata, della probabilità, della probabilità composta e di quella marginale, tratta il teorema di Bayes. Alcuni esempi aiutano la comprensione dei temi trattati.

<http://web.math.unifi.it/users/francini/probabilitacondizionata.pdf>

Il file contiene le principali nozioni di probabilità secondo la definizione classica.

Consigli e sconsigli:

Consigli:

- Operare in contesti quantitativi interessanti e coinvolgenti può essere un utile supporto per passare dalla realtà alla sua astrazione simbolica, introducendo gradualmente il linguaggio formale della matematica;
- insistere sulla casualità degli eventi come concetto generale per cui, dato un esperimento casuale, non si è in grado di prevedere l'esito di una singola prova, ma si è in grado di descrivere tutti gli esiti possibili e di assegnarne la probabilità in ambito classico;
- insistere sul fatto che il teorema di Bayes fornisce una modalità per calcolare come cambia la probabilità di una delle cause (eventi iniziali) quando si vengono a conoscere ulteriori informazioni sull'effetto (evento finale) che si è prodotto.

Sconsigli:

- Si eviti di introdurre la probabilità come un insieme di calcoli e formule su situazioni banali e senza che abbiano un significato in un contesto reale.

Variabili casuali (come introduzione ai modelli di probabilità (binomiale e normale) previsti al quarto anno per istituti tecnici e professionali e per il quinto anno nei licei).

Per introdurre il concetto di variabile casuale è fondamentale saper individuare lo spazio campionario degli eventi casuali elementari associati all'esperimento casuale; definire in esso una grandezza (è funzione reale univoca definita nello spazio campionario) che ne studi un particolare aspetto (nel lancio di due dadi, ad esempio identificare la variabile "somma dei risultati" oppure "massimo fra i due risultati"; numero dei valori divisibili per 5 in una sequenza del gioco del lotto). La variabile casuale definita porta a una semplificazione dell'esperimento stesso, trasferendo nei numeri reali la probabilità associata ai corrispondenti eventi casuali.

Attraverso la definizione di variabile casuale X ciascun evento casuale, sottoinsieme dello spazio campionario Ω , è identificato in modo univoco con un valore reale al quale è associata la probabilità dell'evento stesso. In questo modo è possibile utilizzare la matematica per studiare anche i fenomeni non deterministici.

[Collegamento con *Relazioni e funzioni* per le situazioni deterministiche per esplicitare le differenze con le variabili casuali].

Attività consigliate: Si consiglia di utilizzare le seguenti attività (dal Piano [m@t.abel](#) e altri materiali in rete):

Vorrei una figlia con i capelli rossi ([m@t.abel](#))

In semplici situazioni aleatorie individuare gli eventi elementari; discutere i modi per assegnare ad essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

Stocastica e legami intradisciplinari SECONDA SITUAZIONE: variabili casuali ([m@t.abel](#))

Costruzione di alcune variabili casuali discrete in contesti diversi analizzandone le caratteristiche.

Conviene rispondere a caso?, pp. 106 ó 109 (Matematica 2004)

L'attività presenta una applicazione delle variabili casuali binomiale e normale in un contesto vicino agli studenti.

<http://web.math.unifi.it/users/francini/distribuzionistampa.pdf>

Introduzione alle variabili casuali e presentazione di alcune distribuzioni di probabilità: Bernoulli, Binomiale, Normale. Varie esempi di applicazione. Alcuni argomenti trattati esulano da quanto presentato in questo programma ma possono essere utili per i docenti interessati ad approfondire certe tematiche.

Consigli e sconsigli:

Consigli:

- introdurre le variabili casuali facendo riflettere gli studenti sul fatto che esistono delle situazioni nelle quali il risultato che si produrrà al suo verificarsi non è noto a priori, mentre è noto il procedimento che li genera i risultati (esperimento casuale) e di conseguenza tutti i risultati possibili. Sono esempi: il numero di persone in coda ad uno sportello postale, il numero di pezzi difettosi in un campione di batterie per automobili, il numero di estrazioni utile per ottenere un certo risultato in un certo gioco, la somma dei risultati nel lancio di due dadi bilanciati, ecc. Per lo studio di questi fenomeni casuali è necessario, quindi, definire una grandezza che li possa sintetizzare;
- far vedere come queste nozioni di *Dati e previsioni* possono essere connesse agli altri ambiti (*Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Geometria*) e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro.

Sconsigli:

- evitare di trasmettere solo definizioni di comodo;
- evitare di introdurre il concetto di variabile casuale senza aver introdotto le nozioni di spazio campionario;
- evitare problematiche inutilmente macchinose.

Bibliografia

- P. Baldi, *Calcolo delle probabilità e statistica*, McGraw-Hill Companies, 2003.
- G. Cicchitelli, *Probabilità e statistica*, Ed. 2, Maggioli Editore, 2004.
- P. Ferrari & G. Nicolini & C. Tommasi, *Introduzione all'inferenza statistica*, G. Giappichelli Editore, Torino, 2006.
- B.V. Frosini & M. Montinaro & G. Nicolini, *Il campionamento da popolazioni finite*, UTET Libreria, Torino, 1994.
- G. Ivchenko & Y. Medvedev, *Mathematical statistics*, Mir, Mosca, 1990.
- G. Leti & L. Cerbara, *Elementi di statistica descrittiva*, Il Mulino, 2009.
- P. Monari (a cura di), *Giochi d'azzardo e probabilità*, Editori Riuniti, University Press, Roma, 2012.
- R. Orsi, *Probabilità e inferenza statistica*, Il Mulino, Bologna, 1985.
- M. G. Ottaviani, Distribuzioni statistiche doppie, *Induzioni*, 24, 2002, pp. 39 ó 77.
- F. Pellerey, *Elementi di statistica per le applicazioni*, Celid, Torino, 1998.

Le attività che fanno riferimento ai testi *Matematica 2003* e *Matematica 2004* sono reperibili in formato pdf nel sito: <http://local.disia.unifi.it/gmm/scuola/styled-2>