# Esercitazione 1 (da indagine alla probabilità)

Data la seguente tabella:

Distribuzione di 17 studenti di terza media per statura X e lunghezza braccia Y

| | Y lunghezza braccia (cm) | | | | | | | | | | | | | n.studenti |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X statura (cm) | 153 | 156 | 157 | 158 | 159 | 161 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 172 | 179 | con statura x |
| 155 | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 156 | 2 | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 157 | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| 159 | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 |
| 160 | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 161 | | | | | | | | | 1 | | | | | 1 |
| 162 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | 3 |
| 163 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 164 | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | 2 |
| 166 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| 167 | | | | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| 168 | | | | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 176 | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| n. studenti con lung.braccia y | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 |

(stralcio da una indagine svolta su più classi terze dell'I.C. di Valmorea (CO) A.S. 2009-2010)

<u>Scelto a caso uno studente</u>, dopo aver individuato lo spazio campionario $\Omega$:

1. Individuare gli eventi casuali composti da più eventi elementari:
   - A = {studenti con statura minore di 160cm.};
   - B = {studenti con lunghezza braccia compresa fra 156cm e 167cm estremi inclusi};
   - C = {studenti con statura $\geq$ 160cm};
   - D = {studenti con statura 168 < x < 176}.)
2. Assegnare ai singoli eventi casuali le rispettive probabilità.

Percorso.

a) assicurarsi che tutti gli alunni sappiano leggere ed interpretare correttamente le informazioni contenute nella tabella a doppia entrata presentata;
b) assicurarsi che gli studenti abbiano individuato correttamente lo spazio degli eventi casuali elementari $\Omega$;
c) avviare una discussione su eventi casuali e "probabilità";
d) chiedere agli studenti di classificare gli eventi proposti (eventi elementari, eventi composti, eventi complementari, …);
e) guidarli nell'assegnazione della probabilità secondo la teoria classica, avvalendosi sia della tabella che di eventuali altre rappresentazioni degli eventi casuali citati ( diagramma di Venn);

Approfondimento.

- Individuare, evidenziando le parti interessate nella tabella fornita o utilizzando i diagrammi di Venn , l'evento casuale B/A (noto che lo studente ha statura minore di 160cm, la lunghezza delle braccia è fra 156 e 167 estremi inclusi);
- Cosa cambia?
- Assegnare la probabilità all'evento casuale B/A.

Proff. Gianpaolo Baruzzo------Paola Ranzani

**Proposta soluzione**

| X statura (cm) | Y lungheza braccia (cm) 153 | 156 | 157 | 158 | 159 | 161 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 172 | 179 | n.studenti con statura x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 155 | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 156 | 2 | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 157 | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| 159 | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 |
| 160 | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 161 | | | | | | | | | 1 | | | | | 1 |
| 162 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | 3 |
| 163 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 164 | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | 2 |
| 166 | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| 167 | | | | | | | | | | 1 | | | | 1 |
| 168 | | | | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 176 | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| n. studenti con lung.braccia y | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 |

RISPOSTA

1. In azzurro l'evento casuale A; nel riquadro in grassetto l'evento casuale B.

Cosa si può dire dei due eventi casuali A e B? Cosa si può dire degli eventi casuali A e C?, e dell'evento casuale D?

RISPOSTA

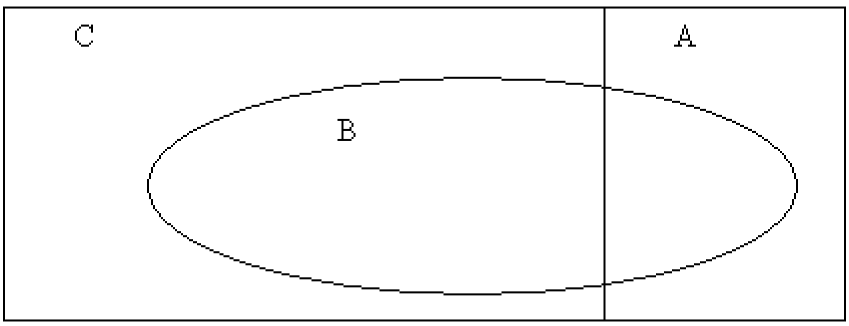
A e B sono sottoinsiemi di Ω e hanno elementi in comune; A e C sono complementari: la loro unione da tutto Ω; l'evento D è un evento impossibile.

2. Le probabilità richieste sono:

P(A)= 4/17 P(B)= 10/17 P(C)=12/17 P(D)= 0

Con i diagrammi di Venn, una rappresentazione degli eventi casuali sopra citati è:

Ω




APPROFONDIMENTO

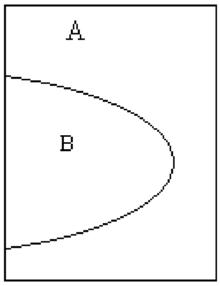
Proff. Gianpaolo Baruzzo------Paola Ranzani

- Individuare, colorando la tabella , o utilizzando lo spazio campionario Ω  l’evento casuale B/A (noto che lo studente ha statura minore di 160cm, la lunghezza delle braccia è fra 156  e 167 estremi inclusi.

RISPOSTA
Questa richiesta pone l’attenzione sulla nuova informazione: “studente con statura minore di 160” che diventa il nuovo spazio campionario su cui individuare l’evento casuale B e la sua probabilità. In azzurro <u>l’evento casuale A, nuovo spazio campionario</u>; il riquadro mostra il nuovo evento casuale B nello spazio A.

| | Y lungheza braccia (cm) | | | | | | | | | | | | | n.studenti |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X statura (cm) | 153 | 156 | 157 | 158 | 159 | 161 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 172 | 179 | con statura x |
| 155 | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 156 | 2 | | | | | | | | | | | | | 2 |
| 157 | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| 159 | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 |
| | | | | | | | | | | | | | n.studenti | 5 |

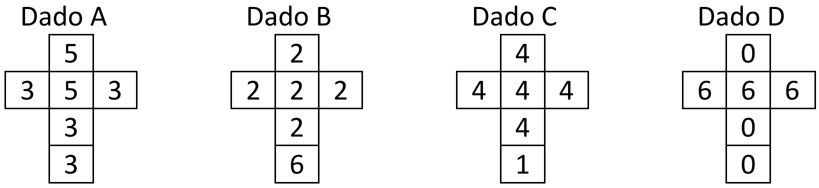
La probabilità di B/A è:    P(B/A)=2/5; dalla discussione si può far notare che P(B)≠P(B/A) quindi  l’evento casuale A ha modificato la realizzabilità dell’evento casuale B, cioè B dipende da A. La visualizzazione mediante i diagrammi di Venn diventa:




Discutendo con gli studenti si può osservare che per identificare eventi casuali compatibili, complementari si possono utilizzare conoscenze della teoria degli insiemi, mentre per la verifica della dipendenza fra eventi casuali si deve utilizzare la probabilità condizionata.

# Esercitazione 2 (Esperimento casuale)

**Sono dati quattro dadi i cui sviluppi sono:**




Carlo e Luca possono scegliere, tra i quattro, il dado con cui giocare.
Il gioco consiste nel lanciare il dado scelto e il giocatore che ottiene il punteggio più alto, vince.

Domande

- Se Carlo sceglie per primo, quale dado conviene scegliere a Luca per vincere?
- Le regole del gioco favoriscono chi sceglie per primo?
- Vi è un'unica scelta che garantisce sempre e comunque la vittoria a Luca e questa dipende anche dalla scelta di Carlo?
- Se Luca individua una strategia vincente e la adotta è sicuro di vincere?

**Elencare le fasi del gioco**

1. Scelta dei dadi e possibili alternative;
2. Esperimento: lancio dei due dadi scelti e osservazione dei possibili esiti elementari (costruzione spazio degli eventi casuali elementari associato all'esperimento per ogni coppia di dadi scelti con uno o più modelli adatti);
3. Rispondere alle varie domande su eventi casuali e probabilità associata;

da produrre:

4. tabella con scelte dei dadi;
5. modelli scelti per la rappresentazione dello spazio campionario associato all'esperimento lancio di due dati scelti;
6. assegnazione della probabilità ad ognuna delle coppie di esiti sperimentali;
7. individuata per ogni coppia di dadi la probabilità di vincita di Luca fornire la tabella riassuntiva:
8. discussione sui risultati ottenuti e rispondere alle domande.

## Proposta soluzione

**Domande**

- **Se Carlo sceglie per primo, quale dado conviene scegliere a Luca per vincere?**

Percorso.

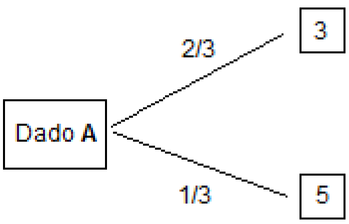
f) Di primo acchito gli studenti potrebbero non comprendere che solo il calcolo delle probabilità permette di individuare la scelta più favorevole per Luca. Si invitano ad individuare, per ciascun dado, gli esiti possibili derivanti dal lancio e a valutare la probabilità degli stessi, utilizzando l'assegnazione classica. Ad esempio, per il dado A, si avrà P(1)= 2/6 e P(3)= 4/6, essendo il dado non truccato e quindi le sei facce giudicate equiprobabili.

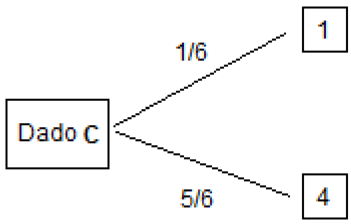
g) Dalla discussione emergerà che non vi è un'unica scelta che garantisce sempre e comunque la vittoria a Luca e che questa dipende anche dalla scelta di Carlo.

Concordato con gli studenti che Luca conosce la scelta di Carlo e non sceglierà il dado da lui lanciato, consigliare la costruzione della seguente tabella con tutte le possibili alternative relative alla scelta dei dadi:

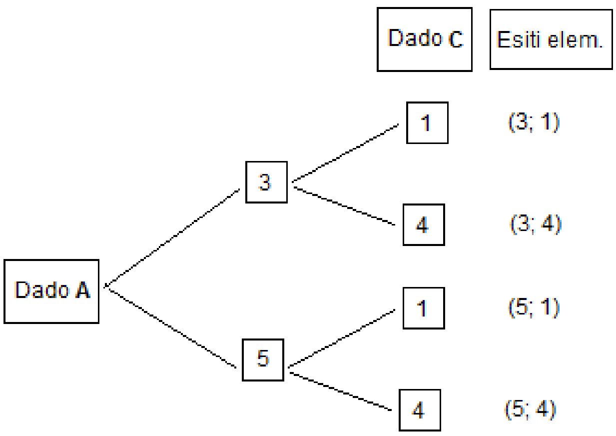
| **Scelta dei dadi** | |
|---|---|
| CARLO | LUCA |
| A | B |
| A | C |
| A | D |
| B | A |
| B | C |
| B | D |
| C | A |
| C | B |
| C | D |
| D | A |
| D | B |
| D | C |

- **h)** **per individuare le scelte per le quali Luca ha maggior probabilità di vincere, si invita a costruire, <u>utilizzando il grafo ad albero</u>, lo spazio degli eventi elementari associato all'esperimento per ogni coppia di dadi, e ad analizzare le possibili scelte di Luca;**
- i) Si consideri, ad esempio, la situazione in cui Carlo sceglie il dado A e Luca il dado C
- j) La rappresentazione, mediante il diagramma ad albero, degli esiti inerenti al lancio di ciascun dado e del relativo lo spazio campionario associato ai singoli lanci è nella figura seguente dove sono state inserite nei rami le probabilità di ciascun esito elementare.

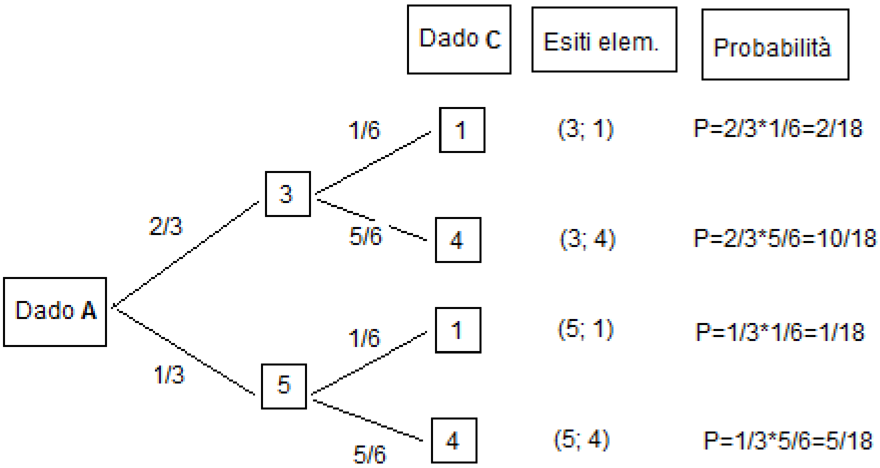



Nella situazione "Carlo sceglie il dado A e Luca il dado C", la rappresentazione degli esiti elementari dell'esperimento casuale, lancio dei dadi, e la successiva assegnazione delle loro probabilità, appare nei seguenti diagrammi ad albero:




Le probabilità associate ai singoli esiti elementari si ottengono moltiplicando le probabilità presenti nei rami relativi a ciascun esito, ovvero:




E' possibile utilizzare anche una rappresentazione tabellare:

Probabilità degli esiti possibili

| **Dado A** | | **Dado C** | |
|---|---|---|---|
| | | **1** | **4** |
| | | $P(1)=\frac{1}{6}$ | $P(4)=\frac{5}{6}$ |
| 3 | $P(3)=\frac{2}{3}$ | $P(3;1)=\frac{2}{18}$ | $P(3;4)=\frac{10}{18}$ |
| 5 | $P(5)=\frac{1}{3}$ | $P(5;1)=\frac{1}{18}$ | $P(5;4)=\frac{5}{18}$ |

Per rispondere al quesito posto si dovranno considerare gli esiti elementari che portano, secondo le condizioni del problema, alla vittoria di Carlo e sommarne le rispettive probabilità.
Luca, lanciando il dado C vince se ha come risultato "4" e Carlo ha ottenuto come risultato "3", cioè

$$P(3;4)=\frac{10}{18}$$

La probabilità di vincita di Carlo si ottiene sommando le probabilità P(3;1)+P(5;1)+P(5;4)= $\frac{2}{18}+\frac{1}{18}+\frac{5}{18}=\frac{8}{18}$.

Si dividono gli studenti in piccoli gruppi, affidando a ciascuno di essi il compito di esaminare le altre 11 scelte possibili dei dadi: un gruppo analizzerà quale scelta conviene fare a Luca, sapendo che Carlo ha lanciato il dado A; un altro gruppo la situazione in cui Carlo ha scelto il dado B; e così via. Successivamente i singoli gruppi socializzeranno i risultati in intergruppo.
Si propone quindi di aggiungere, nella tabella di tutte le possibili scelte, la colonna delle probabilità di vincita di Luca e di evidenziare le scelte più favorevoli per Carlo.
Si dovrà ottenere:

| Scelta dei dadi | Probabilità di vincita di Luca |
|---|---|

| Carlo | Luca | |
|---|---|---|
| A | B | 3/18 |
| A | C | 10/18 |
| A | D | 2/6 |
| B | A | 15/18 |
| B | C | 25/36 |
| B | D | 5/12 |
| C | A | 8/18 |
| C | B | 11/36 |
| C | D | 6/12 |
| D | A | 4/6 |
| D | B | 7/12 |
| D | C | 6/12 |

Dalla tabella si conclude che se Carlo sceglie A, Luca dovrebbe optare per C che gli garantisce la maggior probabilità di vincere; se Carlo sceglie B, a Luca conviene scegliere A; se Carlo sceglie C, Luca dovrebbe preferire D in modo da avere la stessa probabilità di vittoria. Infine se Carlo sceglie D, Luca dovrebbe scegliere C. La scelta più vantaggiosa per Luca dipende da quale dado lancia Carlo.

- **Le regole del gioco favoriscono chi sceglie per primo?**
  No, se il secondo giocatore adotta una strategia fondata sul calcolo delle probabilità: in base alla scelta del primo giocatore, il secondo può effettuare la scelta alla quale è associata la probabilità di vincita maggiore.

- **Pur adottando questa strategia, Luca è sicuro di vincere?**

No!

# Esercitazione 3

**Probabilità e regole algebriche.** (tra media e primo biennio superiore)

Si lancino due dadi regolari, uno alla volta, e si trascrivano in una tabella:

- il risultato della faccia del primo dado (indicata con **a**) e quello che si legge nella faccia ad essa opposta (indicata con **b**);
- il risultato della faccia del secondo dado (indicata con **c**) e ciò che si legge nella faccia ad essa opposta (indicata con **d**).

Domande

A. **Qual è l'esito elementare dell'esperimento? Indicane uno.**
B. **Calcolare la probabilità che la somma dei risultati (a + c) sia uguale a 6;**
C. **Se a + c = 6, a quanto ammonta la somma delle loro facce opposte (b + d)?**
D. **Quanto vale la probabilità di tale somma?**
E. **Se la somma dei risultati (a + c) è uguale a 6, quali valori può assumere il prodotto a·c? Per ogni prodotto, calcolare la probabilità.**

Elencare le fasi dell'attività

- Eseguire materialmente l'esperimento;
- Fornire la tabella dei risultati sperimentali (spazio campionario);
- Analisi della tabella e prime risposte;
- Individuare modelli per l'assegnazione della probabilità agli eventi in oggetto;
- Discussione sui risultati e sui modelli utilizzati.

**Approfondimento**

Domanda:
**Con i dati della tabella iniziale, calcolare la quantità Y = a·c + b·d + a·d + b·c. Il valore sperimentale ottenuto è un valore casuale oppure è una regolarità?.**

Fasi:

- Utilizzare la tabella dei dati sperimentali e fare i calcoli;
- dimostrare, utilizzando le proprietà algebriche e le considerazioni sui dati della tabella se esiste una regolarità.

**Ulteriore domanda.**

**Lanciare due dadi e moltiplicare i due numeri ottenuti. È più probabile ottenere un numero pari o un numero dispari?**

Rispondere motivando la risposta.

## Proposta soluzione

1. Ogni studente fa una serie di lanci trascrivendo i risultati ottenuti. In una unica tabella si raccolgono gli esiti sperimentali, e si guida la discussione.

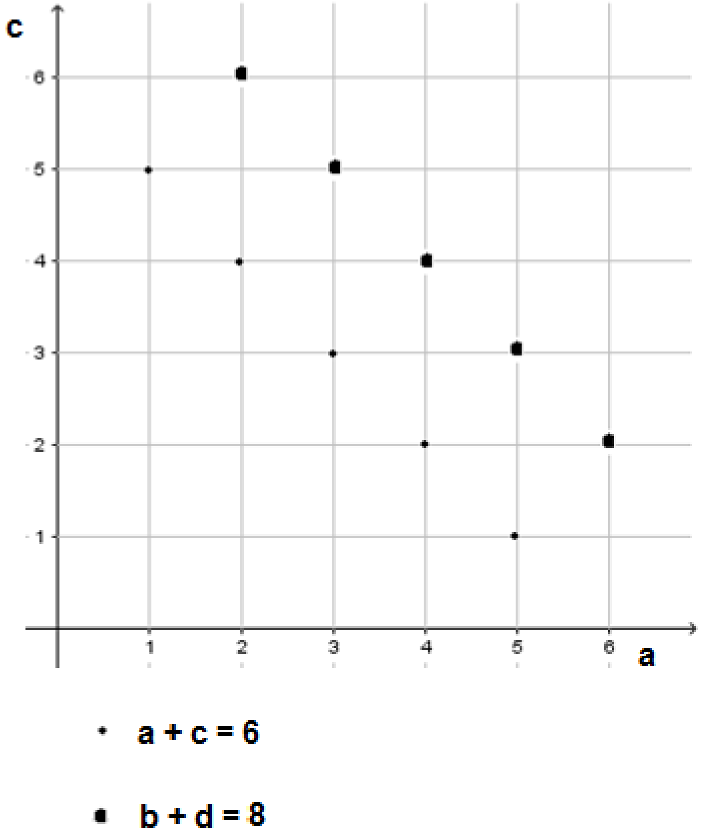
   La tabella seguente è un ***esempio*** di quanto potrebbe risultare:

a)

| Dado 1 | | Dado 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Esito a | Faccia opposta b | Esito c | Faccia opposta d | a + c | b + d | a · c |
| 5 | 2 | 2 | 5 | 7 | 7 | 10 |
| 6 | 1 | 6 | 1 | 12 | 2 | 36 |
| 6 | 1 | 3 | 4 | 9 | 5 | 18 |
| 4 | 3 | 3 | 4 | 7 | 7 | 12 |
| 1 | 6 | 3 | 4 | 4 | 10 | 3 |
| 1 | 6 | 5 | 2 | 6 | 8 | 5 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 8 | 6 | 15 |
| 5 | 2 | 6 | 1 | 11 | 3 | 30 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 9 | 5 | 20 |
| 1 | 6 | 5 | 2 | 6 | 8 | 5 |
| 5 | 2 | 5 | 2 | 10 | 4 | 25 |
| 6 | 1 | 1 | 6 | 7 | 7 | 6 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 6 | 8 | 8 |
| 4 | 3 | 1 | 6 | 5 | 9 | 4 |
| 1 | 6 | 3 | 4 | 4 | 10 | 3 |
| 2 | 5 | 6 | 1 | 8 | 6 | 12 |
| 6 | 1 | 2 | 5 | 8 | 6 | 12 |
| 4 | 3 | 6 | 1 | 10 | 4 | 24 |

2. Dalla discussione dovrebbe emergere che:
   - la somma dei risultati delle facce opposte di un dado regolare è sempre pari a 7 (a + b = c + d = 7);
   - a parità della somma degli esiti (a + c) il loro prodotto può cambiare;
   - la somma dei risultati delle facce opposte è (b + d) = 14 – (a + c).

Prodotto cartesiano o spazio campionario dell’esperimento lancio dei due dadi




(a + c) = 6 ⇨ (1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1) ( punti sottili nel grafico)

**P(a + c = 6) = 5/36**

Se (a + c ) = 6 ⇨ (b + d) = 8 ⇨ (6, 2); (5, 3); (4, 4); (3, 5); (2, 6) (i punti ingrossati nel grafico)

**P(b + d = 8) = 5/36**

Se (a + c ) = 6 ⇨ (a · c) vale: 5; 8; 9; 8; 5

**P(a · c = 5) = 2/36** **P(a · c = 8) = 2/36** **P(a · c = 9) = 1/36**

**Approfondimento**

Con i dati della tabella iniziale, l'insegnante propone di calcolare la quantità Y = ac + bd + ad + bc. Gli studenti osserveranno che il valore trovato è sempre uguale a 49.

L'insegnante pone alcune domande sull'esito del valore Y: l'aver trovato Y = 49 è un caso? E' una regolarità?

| dado 1 | | dado 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Esito a | Faccia opposta b | Esito c | Faccia opposta d | ac | bd | ad | bc | Y = ac+bd+ad+bc |
| 2 | 5 | 4 | 3 | 8 | 15 | 6 | 20 | 49 |
| 2 | 5 | 1 | 6 | 2 | 30 | 12 | 5 | 49 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 16 | 9 | 12 | 12 | 49 |
| 4 | 3 | 1 | 6 | 4 | 18 | 24 | 3 | 49 |
| 5 | 2 | 6 | 1 | 30 | 2 | 5 | 12 | 49 |
| 2 | 5 | 2 | 5 | 4 | 25 | 10 | 10 | 49 |
| 6 | 1 | 3 | 4 | 18 | 4 | 24 | 3 | 49 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 20 | 15 | 8 | 49 |
| 6 | 1 | 6 | 1 | 36 | 1 | 6 | 6 | 49 |
| 4 | 3 | 1 | 6 | 4 | 18 | 24 | 3 | 49 |
| 1 | 6 | 6 | 1 | 6 | 6 | 1 | 36 | 49 |
| 2 | 5 | 5 | 2 | 10 | 10 | 4 | 25 | 49 |
| 3 | 4 | 4 | 3 | 12 | 12 | 9 | 16 | 49 |
| 2 | 5 | 5 | 2 | 10 | 10 | 4 | 25 | 49 |
| 5 | 2 | 2 | 5 | 10 | 10 | 25 | 4 | 49 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 9 | 16 | 12 | 12 | 49 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 16 | 9 | 12 | 12 | 49 |
| 2 | 5 | 1 | 6 | 2 | 30 | 12 | 5 | 49 |

3. E' possibile dimostrare, utilizzando le proprietà algebriche e le considerazioni precedentemente fatte sui dati della tabella 1, che, al variare dei risultati del lancio dei dadi, Y è sempre uguale a $49=7^2$?

È possibile richiamare la scomposizione dei polinomi per ottenere il risultato voluto:

$$Y = a\cdot c + b\cdot d + a\cdot d + b\cdot c = a\cdot c + (7-a)\cdot(7-c) + a\cdot(7-c) + (7-a)\cdot c =$$
$$= c\cdot[a+(7-a)] + (7-c)\cdot[(7-a)+a] = c\cdot(a+7-a) + (7-c)\cdot(7-a+a) =$$
$$= 7\cdot c + 7\cdot(7-c) = 7\cdot(c+7-c) = 7^2$$

**Ulteriore domanda.**

Lanciare due dadi e moltiplicare i due numeri ottenuti. È più probabile ottenere un numero pari o un numero dispari? (Mettere cartesiano???)

P(pari) = 27/36 =3/4 P(dispari) = 9/36 = 1/4

## Esercitazione 4 (dall'osservazione alla probabilità)

**Pirati**

In occasione del carnevale, in una classe di 26 alunni, è stata organizzata una festa il cui tema era "i pirati".
Si sono contati:

- 9 "pirati" con una gamba di legno, 13 con una benda, 12 con un uncino;
- 2 "pirati" hanno solo una gamba di legno e un uncino;
- 1 "pirata" ha la gamba di legno, la benda all'occhio e l'uncino;
- 6 "pirati" hanno solo un uncino;
- 4 hanno solo una gamba di legno.

*L'insegnante* ***sceglie a caso un partecipante*** *alla festa per premiarlo. Dopo aver individuato lo spazio degli eventi elementari associato alla scelta,*

A. *Qual è la probabilità che il partecipante, scelto a caso, abbia la benda o l'uncino?*
B. *Qual è la probabilità che il partecipante, scelto a caso, abbia solo la gamba di legno?*
C. *Qual è la probabilità che il partecipante scelto non abbia l'uncino?*
D. *Qual è la probabilità che il partecipante abbia solo la benda all'occhio?*
E. *Qual è la probabilità che il partecipante non sia vestito da pirata?*

Percorso:

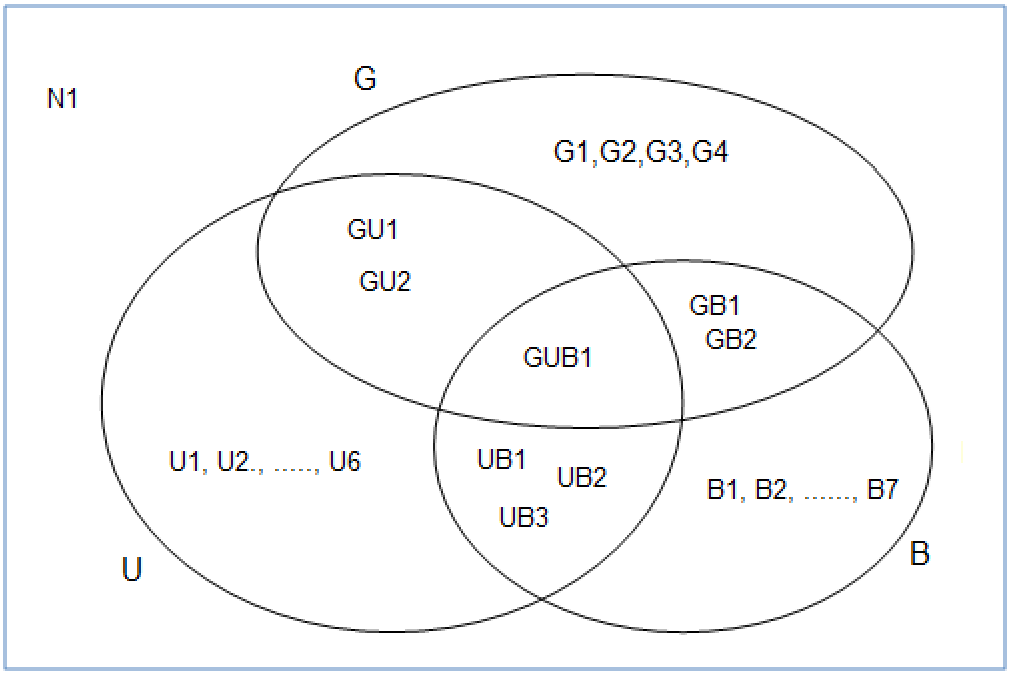
- assicurarsi che tutti gli alunni sappiano leggere ed interpretare correttamente le informazioni contenute nel testo;
- Scegliere un modello per rappresentare il problema;
- chiedere agli studenti di classificare gli eventi proposti (eventi elementari, eventi composti, eventi complementari, …) e fare le considerazioni adeguate;
- guidarli nell'assegnazione della probabilità secondo la teoria classica, avvalendosi del modello scelto;
- è possibile utilizzare il modello per fare altre considerazioni legate al programma di matematica?

### Proposta soluzione

L'obiettivo è condurre gli studenti :

- a scoprire che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità;
- a scoprire che la probabilità dipende totalmente dal modo in cui l'esperimento è definito;
- ad assegnare la probabilità ad eventi composti in diversi contesti problematici;
- ad individuare eventi dipendenti ed eventi indipendenti assegnando a ciascuno le rispettive probabilità.

- L'insieme degli esiti elementari, $\Omega$ , è formato dai nominativi dei 26 partecipanti alla festa che sono eventi equiprobabili.
- Il problema posto può essere schematizzato attraverso l'uso del diagramma di Venn;




la probabilità dell'evento A sarà uguale a:

$$P(A) = \frac{21}{26}$$

secondo l'assegnazione classica di probabilità essendo gli eventi elementari (da tutti) ritenuti ugualmente possibili

$P(B) = \frac{4}{26}$; $P(C) = \frac{13}{26}$; $P(D) = \frac{7}{26}$; $P(E) = \frac{1}{26}$

# Esercitazione 5 (da indagine alla probabilità)

**"La seguente tabella, chiamata "tabella a doppia entrata", riporta la distribuzione doppia di frequenze di 54 studenti di quinta, dell'ITIS "C. Zuccante, rispetto ad una scelta culturale nell'ultimo anno.":**

"Classificazione di 54 studenti di quinta, rispetto ad una scelta culturale dell'ultimo anno."

| **Visitato un museo** | **Visitato un sito archeologico** | | Totale |
|---|---|---|---|
| | Si | No | |
| Si | 27 | 6 | 33 |
| No | 4 | 17 | 21 |
| Totale | 31 | 23 | 54 |

Fonte: ITIS C. Zuccante Ve-Mestre as 2014/15

Domande:

Ammesso di **scegliere a caso uno studente**, qual è la probabilità che si manifestino rispettivamente i seguenti eventi:

- A = "lo studente ha visitato un sito archeologico"
- B = "lo studente ha visitato un museo ma non un sito archeologico"
- C = "lo studente non ha visitato un museo"
- D = "lo studente ha visitato sia un museo che un sito archeologico"
- E = "lo studente non ha visitato nessuno dei due luoghi"
- F = "lo studente ha visitato almeno uno dei due luoghi".

Percorso:

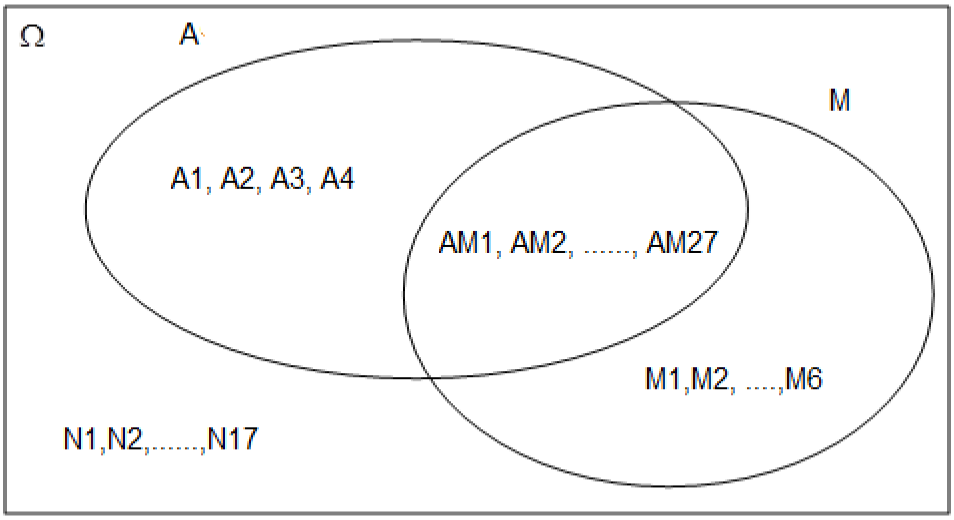
- assicurarsi che tutti gli alunni sappiano leggere ed interpretare correttamente le informazioni contenute nella tabella a doppia entrata presentata;
- Scegliere un ulteriore modello adatto per rappresentare il problema;
- chiedere agli studenti di classificare gli eventi proposti (eventi elementari, eventi composti, eventi complementari, …);
- avviare una discussione sul termine "probabilità";
- guidarli nell'assegnazione della probabilità secondo la teoria classica, avvalendosi sia della tabella che del modello utilizzato;

**Passo avanti**:
C'è differenza fra la probabilità di scegliere a caso uno studente che ha visitato un Museo e la probabilità di scegliere a caso uno studente che ha visitato un Museo fra quelli che hanno visitato un sito archeologico? Perché? Cosa cambia?

## Proposta soluzione

Percorso
assicurarsi che tutti gli alunni sappiano leggere ed interpretare correttamente le informazioni contenute nella tabella a doppia entrata presentata;

Suggerire di rappresentare la situazione data con un diagramma di Venn e di fare una lettura incrociata della tabella e del diagramma. Indicando con $\Omega$ lo spazio degli eventi elementari e con A e M rispettivamente gli eventi, sottoinsiemi dello spazio degli eventi elementari, costituiti dagli studenti che hanno visitato un sito archeologico e visitato un museo, si avrà:

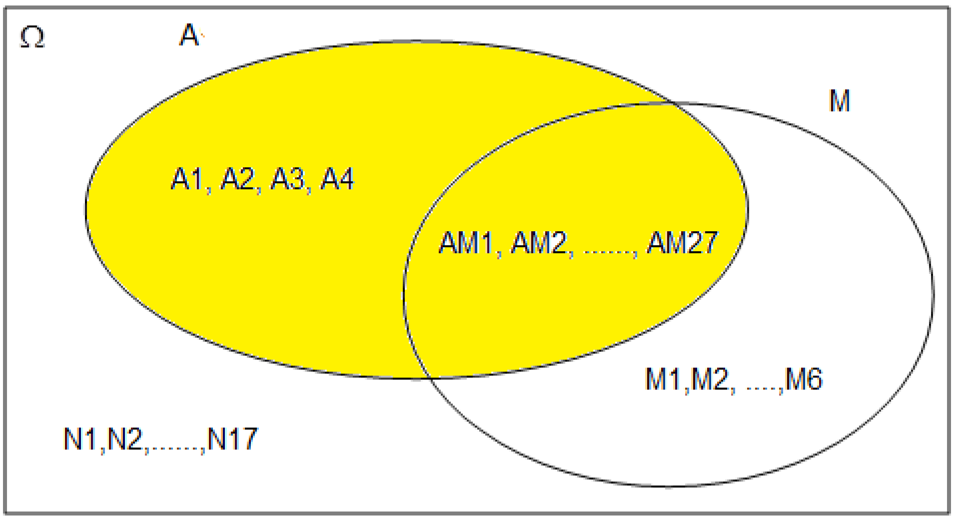



avviare una discussione sul termine “probabilità”.

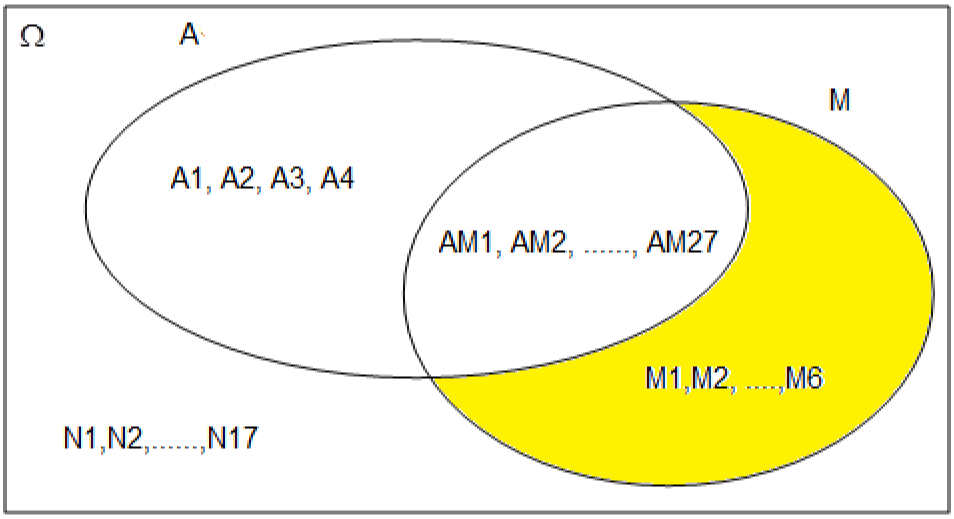
Dalla discussione dovrà emergere che la probabilità di un evento è la valutazione della verosimiglianza con cui esso si realizza che ovviamente va fatta prima di effettuare l’esperimento casuale. Secondo la teoria classica delle probabilità, la probabilità assegnata ad un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell’evento e il numero dei casi possibili, purché questi siano tutti ugualmente possibili. Questa teoria presuppone che sia noto lo spazio degli eventi elementari Ω e che il meccanismo che lo produce non privilegi nessuno degli esiti elementari possibili;

chiedere agli studenti di classificare gli eventi proposti (eventi elementari, eventi composti, eventi complementari, …) e infine guidarli nell’assegnazione della probabilità secondo la teoria classica, avvalendosi del diagramma di Venn;

**la probabilità che si verifichi l’evento A** è il rapporto tra 31, numero dei casi favorevoli al verificarsi dell’evento A, e 54, numero dei casi ugualmente possibili $P(A) = \dfrac{31}{54}$



**la probabilità all'evento B**, è il rapporto tra 6, numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento B, e 54, numero dei casi ugualmente possibili, ovvero $P(B)=\frac{6}{54}=\frac{1}{9}$;

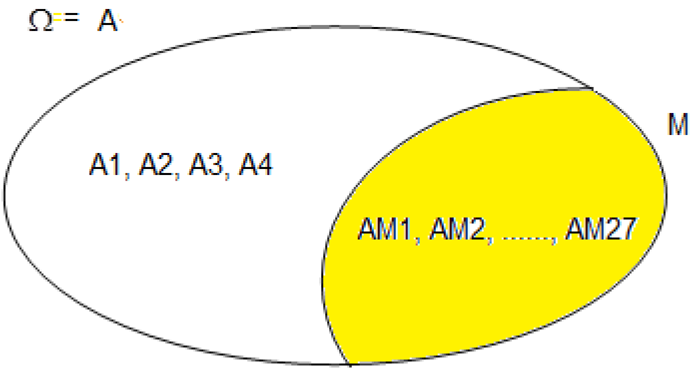



procede poi ad assegnare agli eventi C, D, E, F le probabilità richieste:

$P(C)=\frac{21}{54}=\frac{7}{18}$, $P(D)=\frac{27}{54}$, $P(E)=\frac{17}{54}$, $P(F)=\frac{37}{54}$.

**Passo avanti**: C'è differenza fra la probabilità di scegliere a caso uno studente che ha visitato un Museo e la probabilità di scegliere a caso uno studente che ha visitato un museo fra quelli che hanno visitato un sito archeologico? Perché?
Quanto diventa la probabilità di scegliere a caso uno studente che ha visitato un Museo se è noto che lo studente ha visitato **anche** un sito archeologico?

Relativamente alla prima richiesta Il nuovo spazio campionario è l'evento casuale A e in esso è individuabile l'evento casuale M come suo sottoinsieme.




La parte colorata evidenzia l'evento M una volta che si è verificato l'evento A che viene indicato con il simbolo M/A (M noto il realizzarsi di A o semplicemente M condizionato o dato A). Ciò che è stato trovato M/A è diverso da M. Quindi posso dire che la realizzazione di A ha modificato la composizione di M.

Quindi la $P(M/A)=\frac{27}{31}$

Per la seconda richiesta il nuovo spazio campionario diventa la parte in giallo e quindi M è un evento certo la cui probabilità è 1.

Proff. Gianpaolo Baruzzo------Paola Ranzani

# Esercitazione 6 (eventi casuali e probabilità)

**Esercizio n. 4** (7 punti) **Il porcellino d'India**

In Toscana, d'estate, ci sono molte sagre e in una di queste, il 24 giugno scorso a Chietina durante la "Serata contadina", Anna e Luisella hanno tentato la sorte acquistando rispettivamente i biglietti numerati: 1, 7, 25 e 3, 4, 8, 12, 17, 29.
Al centro di un cortile ci sono 30 casette di legno aperte numerate in ordine diverso ma con tutti i numeri da 1 a 30, disposte in cerchio.

Al centro viene posizionata una scatola rovesciata che nasconde al suo interno un porcellino d'India che, una volta liberato, si muove fino ad entrare in una casetta. Quando entra il gioco termina e vince il possessore del biglietto con lo stesso numero di questa casetta.

***Che probabilità ha Anna di vincere? Quale probabilità ha Luisella rispetto a quella di Anna? Motivate entrambe le risposte.***

Fasi

1. Leggere attentamente la consegna;
2. Individuare lo spazio campionario associato all'entrata del porcellino in una delle casette
3. Individuare eventi casuali elementari e non;
4. Schematizzare il problema o con diagrammi di Venn o con una tabella;
5. Assegnare la probabilità agli eventi casuali individuati;
6. Discussione sui risultati.

Il problema dato è di facile risoluzione.

DIVERTIAMOCI

Il problema può essere modificato pensando che Anna e Luisa abbiano comprato lo stesso numero di biglietti ad es.

| | biglietti | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ANNA | 1 | 7 | 15 | 9 | 25 | 20 |
| LUISELLA | 3 | 4 | 8 | 12 | 17 | 29 |
| ALTRI | 2 | 5 | 28 | 10 | 11 | 13 |
| | 14 | 30 | 16 | 18 | 6 | 27 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 19 |

Alcuni eventi casuali interessanti

- Il porcellino entra in una casetta contrassegnata da un numero primo; come cambiano gli eventi casuali VA{vincita di Anna} e VL{vincita di Luisella} e le probabilità di vittoria di Anna e di Luisella?

Tenendo presente le fasi di seguito una proposta di soluzione utilizzando una forma tabellare:

| | biglietti | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ANNA | 1 | **7** | 15 | 9 | 25 | 20 |
| LUISELLA | **3** | 4 | 8 | 12 | **17** | **29** |
| ALTRI | **2** | **5** | 28 | 10 | **11** | **13** |
| | 14 | 30 | 16 | 18 | 6 | 27 |
| | 21 | 22 | **23** | 24 | 26 | **19** |

In grassetto sono evidenziati i biglietti associati all'evento casuale NP{il porcellino entra in una casetta contrassegnata col numero primo} il nuovo spazio campionario è dato dall'evento casuale NP{7; 3;17; 29; 2; 5; 11; 13; 23; 19 } pertanto VA diventa {7} e P(VA/NP)= 1/10 ; (VA/NP si legge vittoria di Anna condizionato a NP); VL{3;17;29} e P(VL/NP)=3/10.

Interessante è far osservare che inizialmente le probabilità di vincita di Anna e Luisella erano uguali e pari a 6/30; la conoscenza dell'evento NP ha modificato le loro probabilità di vincita.

- Il porcellino entra in una casetta contrassegnata da un numero divisore del 30; come cambiano gli eventi casuali VA{vincita di Anna} e VL{vincita di Luisella} e le probabilità di vittoria di Anna e di Luisella?

| | biglietti | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ANNA | 1 | 7 | **15** | 9 | 25 | 20 |
| LUISELLA | **3** | 4 | 8 | 12 | 17 | 29 |
| ALTRI | **2** | **5** | 28 | **10** | 11 | 13 |
| | 14 | **30** | 16 | 18 | **6** | 27 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 19 |

Indicato con D{il porcellino entra in una casetta contrassegnata con un numero divisore di 30} (o semplicemente " numero divisore di 30"), si evidenziano, in grassetto, in tabella gli esiti elementari che lo compongono.
L'evento casuale D diventa il nuovo spazio campionario su cui identificare VA e VL: D{2; 3; 5; 6;10;15; 30} , VA diventa {15} e VL{3};
le loro probabilità P(VA/D)=1/7 ; P(VL/D)=1/7

- Il porcellino entra in una casetta contrassegnata da un numero che è il MCD fra 15; 30;20; come cambiano gli eventi casuali VA{vincita di Anna} e VL{vincita di Luisella} e le probabilità di vittoria Anna e di Luisella ?

| | biglietti | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ANNA | 1 | 7 | 15 | 9 | 25 | 20 |
| LUISELLA | 3 | 4 | 8 | 12 | 17 | 29 |
| ALTRI | 2 | **5** | 28 | 10 | 11 | 13 |
| | 14 | 30 | 16 | 18 | 6 | 27 |
| | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 19 |

Indicato con E{il porcellino entra in una casetta contrassegnata con un numero che è MCD fra 15,30,20} (o semplicemente " MCD fra15; 30; 20"), si evidenziano, in grassetto, in tabella gli esiti elementari che lo compongono. L'evento casuale E diventa il nuovo spazio campionario su cui identificare VA e VL: E{5} , gli eventi casuali VA e VL , in E diventano eventi impossibili pertanto
le loro probabilità P(VA/E)=0 ; P(VL/E)=0

Il problema porta anche a utilizzare "vecchie" conoscenze (o a rafforzarle) quali:numero primo, divisore di un numero, MCD…

# Esercitazione 8 (da indagine alla probabilità)

**INDAGINE SU VITA SCOLASTICA**

(tabelle tratte da una indagine campionaria svolta in due istituti della Puglia nell' a.s.2011-12 e descritta sulla rivista Induzioni 50-2015)

**Distribuzione del campione di 296 studenti rispetto al numero medio di assenze in un mese e istituto di appartenenza**

| **media assenze in giorni** | **Istituto** | |
|---|---|---|
| | **ITIS Volta** | **IISS Calamandrei** |
| fino a 3 | 141 | 81 |
| da 4 a 8 | 26 | 32 |
| più di 8 | 3 | 9 |
| non risponde | 1 | 3 |
| totale | 171 | 125 |

Tab.1

Fasi

1. Lettura tabelle (es significato di 141; più di 8;.....)
2. Esperimento: **scelta a caso di uno studente** del campione

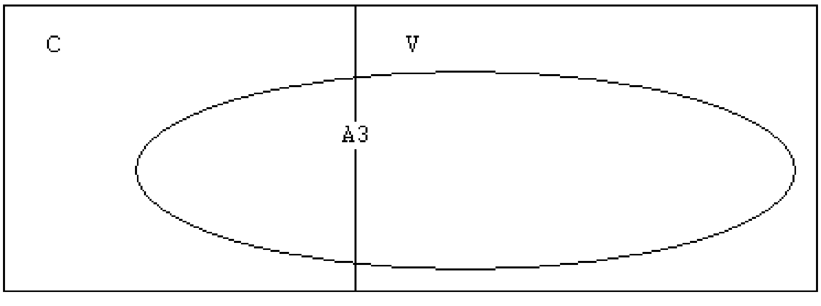
Individuare

- Eventi elementari e Spazio campionario
- ***Eventi casuali cercasi***: V{studente frequentante l'ITIS Volta}; C{ studente frequentante l'IISS Calamandrei}; A3{studente che si assenterà, mediamente, nel prossimo mese al massimo 3 giorni}.......
- ***Altri eventi casuali interessanti***: Se lo studente frequenta l'ITIS Volta l'evento A3 da quali eventi elementari è costituito? - Se lo studente estratto si è assentato più di 8 giorni al mese, di quali eventi elementari è costituito C?......
- Assegnazione della probabilità agli eventi casuali sopra individuati

Proposta di soluzione

Lo spazio campionario, $\Omega$, è dato dai 296 studenti del campione.

$\Omega$



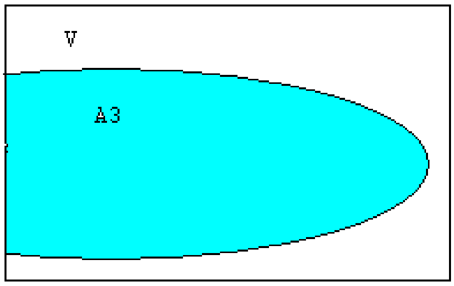

***Eventi casuali cercasi***:

L’evento casuale V è formato dai 171 studenti dell’ITIS Volta; C è formato fai 125 studenti dell’IISS Calamandrei; A3 è formato dai (141+81) studenti che si assentano, mediamente, al massimo 3 gg al mese. V e C sono eventi casuali complementari; A3 ha elementi in comune sia con V che con C: A3 e C , come pure A3 e B sono compatibili.

P(V)= 171/296   P( C )= 125/296 P(A3)= 222/296

***<u>Altri eventi casuali interessanti</u>***

Noto l’evento casuale V, che diventa il nuovo spazio campionario su cui individuare A3 e la sua probabilità, l’evento A3 è formato da141 studenti (A3 ∩ V) come dal diagramma seguente:




P(A3/V)= 141/171

Indicato con  A8 {studente che si è assentato, mediamente, più di   8 giorni al mese}, che è costituto da 12 studenti;l’evento casuale C, noto che si è verificato A8, è formato da soli 9 studenti e la sua probabilità diventa: P(C/A8)= 9 / 12.

Gli eventi casuali A3/V e C/A8 sono entrambi eventi condizionati ma…….Quali considerazioni si possono fare?

**INDAGINE SU VITA SCOLASTICA**

(tabelle tratte da una indagine campionaria svolta in due istituti della Puglia nell'a.s.2011-12 e descritta sulla rivista Induzioni 50-2015)

**Distribuzione dei campioni (100 circa al Volta, 77 al Calamandrei )per motivo dell'assenza ed istituto**

| MOTIVO ASSENZA | ISTITUTO | |
|---|---|---|
| | ITIS Volta | IISS Calamandrei |
| non ho studiato | 43 | 24 |
| vado in giro con amici | 14 | 6 |
| a scuola mi annoio | 22 | 8 |
| resto a casa a dormire | 46 | 31 |
| non mi piacciono i compagni | 5 | 4 |
| non mi piacciono i professori | 12 | 4 |
| totale | 142 | 77 |

Tab.2

Nota: **Ha risposto chi ha fatto assenze, gli studenti del Volta hanno scelto anche più risposte, al Calamandrei una unica risposta.**

1. Lettura tabelle (es significato di 14; al Volta qual è la causa più frequente di assenza, e al Calamandrei?; caratteri e modalità…..)
2. Esperimento: **scelta a caso** di uno studente fra i rispondenti
   - Eventi elementari e Spazio campionario
   - ***Eventi casuali cercasi***: RC{studente del Calamandrei} MA{studente che non va a scuola perché va in giro con amici o resta a casa a dormire}; MS{studente che non va a scuola perché non ha studiato};
   - ***Altri eventi casuali interessanti***: Se lo studente frequenta l'IISS Calamandrei l'evento MS da quali eventi elementari è costituito? - Se lo studente estratto non va a scuola perché non gli piacciono i compagni, di quali eventi elementari è costituito RC?
     Posto NR{studente che non ha fornito alcun motivo }; chi è ($NR \cap C$) e NR/C (far riferimento anche ai dati di Tab.1)
   - Assegnazione della probabilità agli eventi casuali sopra individuati

   Proposta di soluzione

   Lo spazio campionario è costituito dalle 219 risposte.

| motivo assenza | Istituto | |
|---|---|---|
| | Volta | **Calamandrei** |
| non ho studiato | 43 | 24 |
| vado in giro con amici | 14 | 6 |
| a scuola mi annoio | 22 | 8 |
| resto a casa a dormire | 46 | 31 |
| non mi piacciono i compagni | 5 | 4 |
| non mi piacciono i professori | 12 | 4 |
| totale | 142 | **77** |

Si evidenziano in tabella gli eventi casuali MS, in azzurro, costituito da (43+24) risposte ed MA, in giallo, costituito da (14+6+46+31) risposte; in grassetto l'evento casuale RC formato da 77 studenti; Assegnazione delle probabilità:

P(MA)= 97/ 219= 0,443 P(RC)= 77/219=0,352 P(MS)= 67/219=0,306

$(NR \cap C)$ è l'evento casuale formato dai 125-3-77 studenti del Calamandrei (studenti che non hanno risposto o che non hanno fatto alcuna assenza)

MS/RC è un evento casuale condizionato; l'evento casuale RC è il nuovo spazio campionario su cui identificare MS che è costituito dai 24 studenti del Calamandrei e la sua probabilità è P(MS/C)=24/77= 0,312; per l'evento casuale $(NR \cap C)$ si ha $P((NR \cap C))$= 45/(125+171)= 0,152; per NR/C P(NR/C)= 45/ 125=0,36

## Esercitazione 11

## Calcolo combinatorio ed eventi casuali

**Combinazione!**

Carlo ha comperato per la sua nuova bicicletta una robusta catena con chiusura a combinazione. Per diversi giorni non ha occasione di usarla e, quando vuole aprirla, non si ricorda più la stringa numerica.
Per fortuna si ricorda che:

- Il numero da trovare è di 4 cifre;
- La cifra delle unità è tripla de quella delle migliaia;
- Le ultime due cifre sono una potenza della prima.

Domande:

A. Quali sono le cifre che sodisfano le condizioni date?
B. Quanti tentativi deve fare Carlo per essere sicuro di aprire la catena?
C. Qual è la probabilità di aprire la catena al primo colpo mettendo un numero a caso tra quelli necessari?
D. Se non è riuscito ad aprirla nei primi 4 tentativi casuali, qual è la probabilità di aprirla al quinto tentativo?

PERCORSO

- Leggere attentamente la consegna
- Porre l'attenzione su
- Cifre di partenza (tutte distinte?)
- Tipologia della sequenza: sue caratteristiche (interessa l'ordine delle cifre? È ammessa la ripetizione delle cifre?...)
- Se i dati lo permettono elencare tutte le sequenze (spazio fondamentale) o alcune…
- Conteggio delle possibili sequenze usando schemi, modelli…..

### Proposta soluzione

A) Dalle infomazioni si ricava che le cifre sono

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | 1 | 6 |

B) Sono necessari 10 tentativi per inserire nella seconda posizione una delle cifre 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9

C) 1/10;

D) 1/6

**Ma quante saranno?**

Luca e il papà stano viaggiando in autostrada quando si imbattono in un pesante rallentamento.
Per far passare il tempo, Luca legge le targhe delle auto che lo circondano e, vedendo diverse auto la cui targa inizia con le lettere EK, ne individua una e si chiede quante possano essere le auto la cui targa differisca solo per le due lettere finali.

EK 403 ? ?

Il papà gli spiega che, nella formazione delle targhe, vengono utilizzate tutte le lettere dell'alfabeto, ad eccezione delle lettere I, O, Q e U, la cui lettura potrebbe risultare difficoltosa .
Domande:

a) Quante sono le auto la cui targa differisce solo per la due lettere finali?

b) Qual è la probabilità che Luca incontri un'auto con targa EK403 che abbia una vocale e una consonante nelle lettere finali?
c) E quella in cui ci siano due consonanti?

PERCORSO
- Leggere attentamente la consegna

Porre l'attenzione su
- elementi di partenza tra cui operare la scelta(tutti distinti?)
- Tipologia della sequenza: sue caratteristiche (interessa l'ordine delle lettere? È ammessa la ripetizione delle lettere?
- Se i dati lo permettono elencare tutte le sequenze o alcune…(spazio campionario)
- Conteggio delle possibili sequenze usando schemi, modelli…..

**Proposta soluzione**

A) Dal testo si osserva che si possono usare 26-4=22 lettere; conta l'ordine in cui le lettere compaiono e possono essere ripetute
Poiché ogni lettera posta nella prima posizione va collegata ad ognuna delle 22 lettere utilizzate nella seconda, il numero complessivo di automobili la cui targa differisce solo per le due lettere finali è pari a $22 \cdot 22 = 484$

B) tra le 22 lettere utilizzabili ci sono 2 vocali e 20 consonanti; conta l'ordine con cui compaiono la vocale e la consonante pertanto la probabilità richiesta è: $\frac{(2 \cdot 20) \cdot 2}{(22 \cdot 22)} = \frac{20}{121}$

C) $\frac{20 \cdot 20}{(22 \cdot 22)} = \frac{100}{121}$

**A cena da Anna**

Anna ha invitato i suoi amici per un happy hour di anticipo estate. Non tutti gli ospiti sono puntuali, così Anna chiede al marito Marcello di fare accomodare i cinque amici, arrivati puntuali , in soggiorno mentre lei aspetta l'arrivo dei ritardatari.
Marcello, che ama giocare con i numeri, chiede ai cinque amici (Fabio, Piera, Carla, Laura, Giacomo) in quanti modi possibili loro sei si possono sedere in fila sul divano in modo che si alternino sempre un uomo e una donna.

Domanda:
Aiutate gli amici di Anna e Marcello a individuare la soluzione indicando come avete proceduto.

PERCORSO
- Leggere attentamente la consegna
- Porre l'attenzione su
- elementi di partenza tra cui scegliere(tutti distinti?)
- Tipologia della sequenza "seduta" : sue caratteristiche (cosa interessa ?)
- Se i dati lo permettono elencare le sequenze o alcune…(spazio campionario)
- Conteggio delle possibili sequenze usando schemi, modelli…..

**Proposta soluzione**

Notiamo innanzitutto una cosa: il ragionamento è simmetrico (uomini e donne).

Supponiamo dunque che il primo della fila sia un uomo, facciamo i nostri conti e alla fine moltiplichiamo tutto per 2 (per racchiudere l'eventualità che all'inizio della fila ci possa anche es sere una donna).
Gli amici devono sedersi in modo da alternare il sesso, quindi **M -F-M- F- M-F** oppure, caso simmetrico**, F-M-F-M-F- M**.
Per il primo posto si hanno 3 scelte (i tre uomini).
Per il secondo posto abbiamo ugualmente 3 scelte (le tre donne).
Per il terzo posto abbiamo ora 2 scelte (i due uomini rimanenti).
Per il quarto posto 2 s celte (le due donne rimanenti).
Per il quinto posto si ha solo 1 scelta (l'uomo rimasto).
Per il sesto posto 1 scelta (l'ultima donna).
In tutto abbiamo quindi, moltiplicando tra loro i casi e infine per 2,

$$(3\bullet 3\bullet 2\bullet 2\bullet 1\bullet 1)\bullet 2=72$$

**Il lucchetto**

Enrico ha comperato un lucchetto a combinazione con tre rotelline ognuna delle quali riporta i numeri dallo 0 al 9; con questo lucchetto a chiuso la sua valigia.
Purtroppo, dopo un po' di tempo, non ricorda più la combinazione dei numeri per aprire il lucchetto: ricorda solo che la loro somma è 5 perché l'iniziale del suo nome è la quinta lettera dell'alfabeto.

Domande:

A. Elencare tutte le combinazioni possibili che Enrico deve provare per aprire il lucchetto.
B. Se si fosse anche ricordato che il primo numero era lo zero, qual è la probabilità di aprire il lucchetto al primo tentativo?

PERCORSO

- Leggere attentamente la consegna
- Porre l'attenzione su
- elementi di partenza tra cui scegliere(tutti distinti?)
- Tipologia della sequenza: sue caratteristiche (interessa l'ordine delle cifre? È ammessa la ripetizione delle cifre?
- Se i dati lo permettono elencare le sequenze o alcune…(spazio campionario)
- Conteggio delle possibili sequenze usando schemi, modelli…..

A)

Ecco le possibilità

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 014 | 023 | 122 | 113 | 005 |
| 041 | 032 | 212 | 131 | 050 |
| 104 | 203 | 221 | 311 | 500 |
| 140 | 230 | | | |
| 401 | 302 | | | |
| 410 | 320 | | | |

B) 1/6